Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
20. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{Z}/{\sim_{3\mathbb{Z}}}$ wie auf dem letzten Übungsblatt definiert. Wir schreiben kurz $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/{\sim_{3\mathbb{Z}}}$ und bezeichnen die Elemente als $[x] := [x]_{\sim_{3\mathbb{Z}}}$.

Zeigen Sie: $[x] + [y] := [x + y]$ gibt eine wohldefinierte Verknüpfung und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ wird dadurch zu einer Gruppe.

(b) Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe mit drei Elementen, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{F}_4^\times \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(d) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus der Ringe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_4$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung

$$X \times X \to X, \quad (x, y) \to xy.$$

Ferner gebe es für beliebige Elemente $x, y \in X$ stets Elemente $a, b \in X$ derart, dass

$$ax = y \quad \text{und} \quad xb = y.$$

Zeigen Sie, dass X mit der gegebenen Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Wofür braucht man die Bedingung $X \neq \emptyset$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass A als Element in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ invertierbar ist.

Ist A als Element in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$ invertierbar?

(b) Bestimmen Sie $\#\,\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$.

(c) Geben Sie alle Elemente aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$. Dann definieren wir die *transponierte Matrix*, als $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

(a) Geben Sie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)^t$ an.

(b) Seien nun $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,l}(K)$. Zeigen Sie: $(AB)^t = B^t A^t \in \mathrm{Mat}_{l,n}(K)$.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die elf LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

A	O	V	R	E	I	S	O	M	O	R	P	H	I	S	M	U	S	R	Z
E	V	U	M	N	D	E	L	D	X	Z	M	T	T	J	Y	Q	F	O	T
Q	V	Y	V	E	R	K	N	U	E	P	F	U	N	G	C	M	A	V	R
U	M	P	I	A	Z	Y	J	R	M	O	L	X	T	W	X	H	T	L	A
I	V	F	B	V	K	V	N	X	A	G	H	R	S	H	P	I	K	X	N
V	L	H	O	L	X	X	F	B	W	E	E	W	X	O	S	P	U	G	S
A	I	G	D	V	Z	B	L	L	G	I	Q	O	Q	M	D	S	L	S	P
L	S	N	U	M	U	R	P	C	N	R	N	G	Q	O	U	G	H	U	O
E	T	Q	V	C	D	U	N	I	L	U	W	P	E	M	Q	H	X	T	N
N	Q	B	V	E	F	M	F	S	L	S	O	W	P	O	R	V	K	G	I
Z	Y	Y	W	K	R	E	A	L	C	P	I	O	Q	R	H	B	M	P	E
R	T	X	L	O	D	T	T	T	P	K	L	G	A	P	K	W	F	V	R
E	J	W	Y	L	B	E	I	U	R	Y	Y	K	A	H	O	V	L	Q	T
L	A	Y	H	G	I	C	L	E	N	I	J	T	C	I	E	K	E	U	Z
A	B	O	T	L	Z	D	I	O	R	H	X	H	H	S	R	G	Q	I	D
T	W	Q	E	P	R	R	M	X	X	B	B	Y	B	M	P	F	P	E	U
I	P	R	N	L	F	R	L	J	L	R	A	U	F	U	E	I	H	A	Y
O	H	N	X	A	I	T	W	T	A	I	O	R	P	S	R	Z	K	U	B
N	C	E	S	N	C	J	J	Z	F	E	W	Z	X	D	V	R	K	Q	K
T	M	E	G	V	E	U	A	U	O	L	Q	Y	G	J	X	E	P	R	D

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 27. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.