Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
6. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und sei $a \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $a \cdot g = g \cdot a$. Wir definieren eine neue Verknüpfung

$$\begin{aligned} *_a \coloneqq *\colon G \times G &\longrightarrow G, \\ (x, y) &\longmapsto x * y \coloneqq x \cdot a \cdot y, \end{aligned}$$

und eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon G &\longrightarrow G, \\ x &\longmapsto a^{-1} \cdot x. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $(G, *)$ ist eine Gruppe.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung ϕ ist ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G, \cdot)$ und $(G, *)$.

(c) Betrachten Sie $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ und $a = 3$. Berechnen Sie $2 * 5$ und $\phi(7)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, in der für alle $x \in G$ gilt: $x = x^{-1}$. Zeigen Sie: $(G, \circ)$ ist abelsch.

(b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $f : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

Zeigen Sie: f ist genau dann ein Gruppenisomorphismus, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, falls

- $f\colon (R, +) \to (S, +)$ ein Gruppenhomomorphismus ist,
- für alle $a, b \in R$ gilt: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ und
- $f(1) = 1$.

Wir bezeichnen $f^{-1}(0)$ als *Kern* des Ringhomomorphismus f.

(a) Sei R ein beliebiger Ring.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$.

(b) Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Dann nennen wir

$$R^\times := \{r \in R \mid r \text{ ist invertierbar}\}$$

die Einheitengruppe von R.

(a) Sei $\Phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

Zeigen Sie: Es gilt $\Phi(R^\times) \subseteq S^\times$ und die Einschränkung

$$\Phi^\times\colon R^\times \to S^\times, \quad r \mapsto \Phi(r)$$

von Φ auf die Einheitengruppe ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie: Ist $1_R = 0_R$, so ist $R = \{0_R\}$.

(c) Zeigen Sie: $0_R \in R^\times \iff R = \{0_R\}$.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 13. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.