Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
19. November 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es die Kohomologiegruppen für einige *toy-models* zu berechnen.

(a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem Ein-Punkt-Raum $X = \{pt\}$. Zeigen Sie auf mindestens zwei verschiedene Arten, dass $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$, wenn $q \geq 1$.

(b) Sei G eine abelsche Gruppe, X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $p \in X$ ein Punkt. Sei $\mathcal{G}$ die Prägarbe auf X, die für offene Teilmengen $V \subseteq U \subseteq X$ folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{G}(U) := \begin{cases} G & \text{if } p \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \rho^U_V(f) := \begin{cases} f & \text{if } p \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X ist und berechnen Sie die Halme. Die Garbe $\mathcal{G}$ ist die sogenannte *Wolkenkratzergarbe assoziiert zu* p.
Zeigen Sie auf mindestens zwei Verschiedene Arten (eine davon mit Čech-Kohomologie), dass $H^q(X, \mathcal{G}) = 0$ für $q \geq 1$.

(c) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Die *direkte Bild-Garbe* $f_*\mathcal{F}$ sei definiert als $f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ und die Restriktionsabbildungen seien durch jene von $\mathcal{F}$ induziert. Zeigen Sie, dass $f_*\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y ist.
Sei nun $\mathcal{F}$ welk. Brechnen Sie $H^q(Y, f_*\mathcal{F})$ für alle $q \geq 0$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es das sogenannte *Cousin-Problem* zu lösen:

Jede analytische Hyperfläche V in $\mathbb{C}^n$ ist der Nullstellenort einer ganzen Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*) = 0$ für alle $q > 0$.
Hinweis: Sie können benutzen, dass $H^q(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ für $q > 0$ (Die erste Gleichheit folgt aus der algebraischen Topologie und der Tatsache, dass $\mathbb{C}^n$ kontrahierbar ist. Die zweite Gleichheit folgt aus dem sogenannten *$\bar{\partial}$-Poincaré-Lemma*).

(b) Zeigen Sie, dass eine Überdeckung $\mathbb{C}^n = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ und Funktionen $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ existieren, sodass

$$V \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha \,:\, f_\alpha(x) = 0\},$$
$$f_\alpha / f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta).$$

(c) Finden Sie eine ganze Funktion f, deren Nullstellenort genau V ist.
Hinweis: Definieren Sie $g := (f_\alpha/f_\beta)_{\alpha,\beta\in I} \in C^1(\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}, \mathcal{O}^*)$ und untersuchen Sie dg, wobei d das Čech-Differential ist.
Bemerkung: Der vorherige Hinweis entsteht aus dem Ziel den Umgang mit Čech-Kohomologie zu üben. Alternativ können Sie diese Aufgabe mit Hilfe von Geradenbündeln anstelle von Čech-Kohomologie lösen. Benutzen Sie dafür den Fakt, dass $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*)$ für jede komplexe Mannigfaltigkeit X.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Eine komplexe Mannigfaltigkeit heißt *parallelisierbar*, wenn das holomorphe Tangentialbündel trivial ist.

(a) Zeigen Sie, dass komplexxe Tori parallelisierbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^1$ nicht parallelisierbar ist. Was ist das Tangentialbündel von $\mathbb{P}^1$?

Hinweis: Seien E und E' (holomorphe) Vektorbündel vom Rang r auf einer komplexe Mannigfaltigkeit X. Angenommen diese werden auf der selben Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ durch die folgenden Kozykel beschrieben:

$$E \longleftrightarrow \{U_\alpha, \psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{C})\}, \qquad E' \longleftrightarrow \{U_\alpha, \psi'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{C})\}.$$

Dann ist $E \cong E'$ genau dann, wenn holomorphe Funktionen $h_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{C})$ existieren, sodass $\psi'_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} \cdot \psi_{\alpha\beta} \cdot h_\beta$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $Y \subset X$ eine glatte Hyperfläche, die durch einen Schnitt $s \in H^0(X, L)$ für ein holomorphes Geradenbündel $L \in \mathrm{Pic}(X)$ mittels $Y = \{x \in X \,:\, s(x) = 0 \in L_x\}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass das normale Bündel $\mathcal{N}_{Y/X}$ isomorph zu $L|_Y$ ist.
Hinweis: Per Definition existiert für jedes $y \in Y$ eine Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eines Atlas auf X, sodass $y \in U_\alpha$ und $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap Y) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \,:\, z_n = 0\}$, wobei $n = \dim(X)$. Insbesondere ist mit

$$\varphi_\alpha = (\varphi_1^\alpha, \ldots, \varphi_n^\alpha) : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$$

durch

$$(V_\alpha, \psi_\alpha) := \big(U_\alpha \cap Y, (\varphi_1^\alpha|_{U_\alpha\cap Y}, \ldots, \varphi_{n-1}^\alpha|_{U_\alpha\cap Y})\big)$$

eine Karte um $y \in Y$ gegeben. Berechnen Sie die Kozykel-Beschreibung von $L|_Y$, $T_X|_Y$ und T_Y bezüglich eines Atlas der Form $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ und zeigen Sie dann, dass $L|_Y$ und $\mathcal{N}_{Y/X}$ isomorph zueinander sind.

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 10. Dezember**.