Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
19. November 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes holomorphe Vektorbündel E vom Rang r ein nicht-degenerierter bilinearer Homomorphismus von Vektorbündeln

$$\bigwedge^k E \oplus \bigwedge^{r-k} E \xrightarrow{B} \det(E)$$

existiert. Folgern Sie hieraus die Existenz eines Isomorphismus von holomorphen Vektorbündeln $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{r-k} E^* \otimes \det(E)$.
Erinnerung: Eine bilineare Abbildung $B : V \times W \to Z$ von Vektorräumen heißt *nicht-degeneriert*, wenn $B(v, w) = 0$ für alle $w \in W$ bereits $v = 0$ impliziert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jedes nicht-triviale homogene Polynom $0 \neq s \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]_k$ vom Grad k als nicht-trivialer Schnitt von $\mathcal{O}(k)$ auf $\mathbb{P}^n$ betrachtet werden kann. (Tatsächlich ist jeder nicht-triviale Schnitt von dieser Form.)
Gibt es nicht-triviale globale Schnitte von $\mathcal{O}(-1)$ auf $\mathbb{P}^n$?
Hinweis: Für ein holomorphes Vektorbündel $E \to X$, das durch die folgenden Kozykel defineirt wird

$$E \longleftrightarrow \{U_i, \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{C})\},$$

ist ein holomorpher Schnitt $s : X \to E$ eindeutig durch die Relationen

$$s \longleftrightarrow \{U_i, s_i : U_i \to \mathbb{C}^r\},$$

sodass $s_i = \psi_{ij} \circ s_j$ auf $U_i \cap U_j$, bestimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf einem topologischen Raum X und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu Zeigen, dass die Injektivität von φ äquivalent zu der Injektivität aller induzierten Abbildungen φ_x auf den Halmen und äquivalent zur Injektivität der Abbildungen φ_U für jede offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist. Bei der Surjektivität ist die zweite Äquivalenz nicht gültig.

(a) Sei $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ der Homomorphismus, der für $x \in X$ durch φ auf den Halmen von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ induziert wird. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv (bzw. surjektiv) ist, wenn φ_x für alle $x \in X$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(b) Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ die Abbildung φ_U injektiv ist.

(c) Sei X nun eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X^*$ als Garbe auf X durch

$$\mathcal{O}_X^*(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \,:\, f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U\}$$

auf offenen Teilmengen $U \subseteq X$ definiert. Zeigen Sie, dass der Garben-Homomorphismus $\alpha : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$, der durch

$$\begin{aligned} \alpha_U : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X^*(U) \\ f &\longmapsto e^f \end{aligned}$$

definiert ist, surjektiv ist. Ist α_U surjektiv für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf einem topologischen Raum X. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$$

exakt ist.
Das Ziel dieser Aufgabe ist es Folgerungen aus den Resultaten von Aufgabe 3 für kurze exakte Sequenzen von Garben zu schließen.

(a) Sei $\mathcal{S}$ eine Garbe auf X und $s \in \mathcal{S}(U)$. Zeigen Sie, dass $s = 0$ genau dann, wenn $s_x = 0$ für alle $x \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$$

für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ exakt ist.
Hinweis: Arbeiten Sie auf den Halmen. Zeigen Sie die Exaktheit auf $\mathcal{G}(U)$ mit Hilfe von Teil (a).

(c) Geben Sie ein Beispiel an, sodass für eine passende offene Teilmenge $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$$

nicht exakt ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 3. Dezember**.