Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
2. Juli 2018

Geometrie L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Hyperbel $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sowie $P = (x_0, y_0) \in E$.

Zeigen Sie, dass die Tangente an E durch den Punkt P die Gleichung $T_P : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ erfüllt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zu einer gegebenen Hyperbel

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wollen wir die orthoptische Kurve bestimmen, d.h. die Menge aller Schnittpunkte orthogonaler Tangenten an H.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Für $P \in H$ sei $\mathfrak{m}(P)$ die Steigung der Tangente T_P durch P an H.

Zeigen Sie, dass, für $m \in \mathbb{R}$,

$$c_\pm(m) := \left(\frac{ma^2}{\pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}}, \frac{b^2}{\pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}} \right) \in H$$

die zwei Punkte der Hyperbel mit Tangentensteigung m sind, d.h. $\mathfrak{m}(c_\pm(m)) = m$.

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente durch den Punkt $c_\pm(m)$ durch

$$T_{c_\pm} : y = mx \mp \sqrt{m^2a^2 - b^2}$$

gegeben ist.

(c) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Steigungen m der Tangenten an H durch (x_0, y_0) die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$m^2(x_0^2 - a^2) - 2x_0y_0m + y_0^2 + b^2 = 0$$

sind.

(d) Folgern Sie, dass die orthoptische Kurve zu H gerade durch den Kreis

$$O : x^2 + y^2 = a^2 - b^2$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei die Hyperbel $H(a,b) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Brennpunkte $F_1(a,b) = (e(a,b),0)$ und $F_2(a,b) = (-e(a,b),0)$ in Abhängigkeit von a und b, durch $e(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$ gegeben sind.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für einen Punkt $P \neq (\pm a, 0) \in H$ die Hyperbelbedingung $||PF_1(a,b)| - |PF_2(a,b)|| = 2a$ äquivalent zu $e(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$ ist.

(b) Geben Sie die Exzentrizität $\varepsilon(a,b)$ in Abhängigkeit von a und b an.

(c) Zeigen Sie, dass die Leitgeraden durch

$$l_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{a^2}{e(a,b)}\right\} \quad \text{und} \quad l_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{a^2}{e(a,b)}\right\}$$

gegeben sind.

(d) Zeigen Sie, dass Leitgeraden, Brennpunkt und Exzentrizität eine Hyperbel eindeutig bestimmen: Zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a > 0$, $b > 0$ und $\varepsilon(a,b) > 1$ gilt, ist

$$\left\{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|Pl_1(a,b)|}{|PF_1(a,b)|} = \varepsilon(a,b)\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 9. Juli** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.