

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $f, g: M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ zwei Abbildungen von Komplexen und $h: f \Rightarrow g$ eine Homotopie.

Zeigen Sie: Dann ist $H^n(f) = H^n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Hufeisenlemma: Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln und seien $P'_\bullet \rightarrow M'$ und $P''_\bullet \rightarrow M''$ projektive Auflösungen, so gibt es eine projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$, so dass das folgende Diagramm kommutiert und die Spalten exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\varepsilon'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon_2} & P_1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon''_2} & P''_1 & \xrightarrow{\varepsilon''_1} & P''_0 & \xrightarrow{\varepsilon''} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeigen Sie:

- (a) $\text{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/IJ$.
- (b) $\text{Tor}_2^R(R/I, R/J) \cong \text{Kern}(I \otimes_R J \rightarrow IJ)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\text{Tor}_i^R(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(N, M)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M ein \mathbb{Z} -Modul, N ein $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modul und d ein Teiler von n . Zeigen Sie:

$$(a) \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M/dM, & \text{falls } i = 0, \\ \{m \in M : dm = 0\}, & \text{falls } i = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$(b) \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, N) = \begin{cases} N/dN, & \text{falls } i = 0, \\ \{m \in N : dm = 0\}/(n/d)N, & \text{falls } i > 0 \text{ ungerade,} \\ \{m \in N : (n/d)m = 0\}/dN, & \text{falls } i > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Abgabe bis Beginn der Übung um 14:00 am Mittwoch, den 30. Mai.