Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
9. Mai 2018

Kommutative Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien M, N R-Moduln. Eine multilineare Abbildung $\varphi\colon M^n \to N$ nennen wir *symmetrisch*, falls für alle Permutationen $\sigma \in S_n$ gilt

$$\varphi\big((x_i)\big) = \varphi\big((x_{\sigma(i)})\big).$$

Wir nennen eine multilineare Abbildung $\varphi\colon M^n \to N$ *alternierend*, falls für alle $1 \le i < j \le n$ und $x_i = x_j$ gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Zu jedem R-Modul N und jeder symmetrischen Abbildung $\varphi\colon M^n \to N$ gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\Phi\colon \operatorname{Sym}^n(M) \to N$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \operatorname{Sym}^n(M) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

(b) Zu jedem R-Modul N und jeder alternierenden Abbildung $\varphi\colon M^n \to N$ gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\Phi\colon \bigwedge^n(M) \to N$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bigwedge^n(M) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $T(R) \cong R[x] \cong \operatorname{Sym}(R)$ (als R-Algebren).

Geben Sie ein R an, so dass $T(R^2) \not\cong \operatorname{Sym}(R^2)$ ist.

(b) Seien V, W freie R-Moduln von endlichem Rang.

Zeigen Sie, dass $V \otimes \operatorname{Hom}(W, R) \to \operatorname{Hom}(W, V)$, $v \otimes f \mapsto [w \mapsto f(w)v]$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring in dem 2 und 3 invertierbar sind und V ein R-Modul.

Seien $\sigma_1 = (1\ 2)$ und $\sigma_2 = (1\ 3)$ Permutationen aus S_3.

Zu einer Permutation σ_i, $i \in \{1,2\}$ und einem R-Modul N nennen wir eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V^3 \to N$ σ_i-symmetrisch, falls

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = -\varphi(x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(2)}, x_{\sigma_i(3)}) \text{ und } \varphi(x_1,x_2,x_3) = \varphi(x_{\sigma_j(1)}, x_{\sigma_j(2)}, x_{\sigma_j(3)}) + \varphi(x_1,x_3,x_2),$$

wobei $j = \{1,2\} \setminus i$.

(a) Für $i \in \{1,2\}$ definieren wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_i\colon V^3 &\to V^{\otimes 3} \\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto \frac{1}{3}\big(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_{\sigma_j(1)} \otimes x_{\sigma_j(2)} \otimes x_{\sigma_j(3)} \\ &\qquad - x_{\sigma_i(1)} \otimes x_{\sigma_i(2)} \otimes x_{\sigma_i(3)} - x_{\sigma_j\sigma_i(1)} \otimes x_{\sigma_j\sigma_i(2)} \otimes x_{\sigma_j\sigma_i(3)}\big), \end{aligned}$$

wobei $j = \{1,2\} \setminus i$. Weiterhin sei $\mathbb{S}_i \coloneqq \psi_i(V^3) \subseteq V^{\otimes 3}$.

Zeigen Sie, dass ψ_i σ_i-symmetrisch ist und dass es zu jedem R-Modul N und jeder σ_i-symmetrischen Abbildung $\varphi_i\colon V^3 \to N$ genau eine R-lineare Abbildung $\Phi\colon \mathbb{S}_i \to N$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^3 \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \mathbb{S}_i \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

(b) Finden Sie injektive Abbildungen $\bigwedge^3 V \to \bigwedge^2 V \otimes V$, deren Kokern jeweils isomorph zu $\mathbb{S}_i$, $i \in \{1,2\}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring in dem 2 und 3 invertierbar sind und M ein freier R-Modul.

(a) Zeigen Sie: $T^2(M) \cong \mathrm{Sym}^2(M) \oplus \bigwedge^2(M)$.

(b) Zeigen Sie: $T^3(M) \cong \mathrm{Sym}^3(M) \oplus \bigwedge^3(M) \oplus \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 9. Mai**.