Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
13. Dezember 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $\mathcal{A}^k(\mathbb{R}^m)$ der Raum der k-Formen auf $\mathbb{R}^m$, d.h. $\mathcal{A}^k(\mathbb{R}^m)$ besteht aus Summen von Elementen der Form $f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_k \leq m$, wobei die $x_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^m$ sind.

Für $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$\varphi^*(f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \coloneqq (f \circ \varphi)\mathrm{d}(x_{i_1} \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x_{i_k} \circ \varphi)$$

und setzen dies linear zu einem Homomorphismus $\varphi^* \colon \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ fort. Dabei ist

$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^n)$$

für eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. $g \in \mathcal{A}^0(\mathbb{R}^n)$.

(a) Sei X eine Riemannsche Fläche, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ein komplexer Atlas und $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ die Kartenwechselabbildungen. Seien $\omega_i \in \mathcal{A}^k(\varphi_i(U_i))$ k-Formen (für $k \leq 2$).

Zeigen Sie: $\omega = (\omega_i)_i$ ist genau dann eine k-Form auf X, wenn für alle i und j gilt: $\omega_i = \varphi_{ij}^*\omega_j$ auf $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

(b) Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung Riemannscher Flächen und $\omega = (\omega_i)_i$ eine k-Form auf Y $(k \leq 2)$ für einen komplexen Atlas (U_i, φ_i) auf Y. Sei (V_j, ψ_j) ein komplexer Atlas von X und seien $f_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} \colon \psi_j(f^{-1}(U_i) \cap V_j) \to \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: $f^*\omega \coloneqq (f_{ij}^*\omega_i)_{i,j}$ ist eine k-Form auf X.

(c) Sei $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg und ω eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie: $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*\omega.$

(d) Sei $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus und $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg.

Zeigen Sie: $\displaystyle\int_{\varphi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \varphi^*\omega.$

Folgern Sie, dass das Wegintegral auf einer Riemannschen Fläche X wohldefiniert ist.

(e) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, d.h. $\det \mathrm{Jac}(\varphi) > 0$, und $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2)$.

Zeigen Sie: $\displaystyle\int_D \varphi^*\omega = \int_{\varphi(D)} \omega.$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei T der komplexe Torus, durch verklebte Karten wie in Beispiel 2.8 gegeben.

Zeigen Sie: die 1-Form $\mathrm{d}z$ liefert nach Verkleben eine wohldefinierte 1-Form ω auf T.

(b) Sei $\Lambda := \langle 1, \tau \rangle \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi\colon \mathbb{C} \to X := \mathbb{C}/\Lambda$ die Projektion. Sei weiterhin $\lambda \in \Lambda$ ein Gitterpunkt und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}/\Lambda$, $\gamma(t) = \pi(t\lambda)$ eine Schleife.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z$ und $\displaystyle\int_X \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f\colon D' \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $D' \subseteq \mathbb{C}$. Zu einem Punkt $z_0 \in D'$ sei $\operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0)$ das Residuum um z_0, d.h. der -1-Laurentkoeffizient.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{D} \subset D'$ ist, ∂D stückweise $\mathcal{C}^1$ ist und keine Null- oder Polstellen von f enthält.

Zeigen Sie: $\displaystyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} f \mathrm{d}z = \sum_{z_0 \in D} \operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0).$

Folgern Sie, dass das Residuum $\operatorname{Res}(\omega, p)$ einer meromorphen Differentialform ω um einen Punkt p auf einer Riemannschen Fläche X wohldefiniert ist.

(b) Sei ω eine meromorphe Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche X.

Zeigen Sie: Die Summe der Residuen von ω ist 0.

(c) Sei $f \neq 0$ nun eine meromorphe Funktion auf X.

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) = 0.$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\operatorname{Res}(\frac{\mathrm{d}f}{f}, p) = \operatorname{ord}_p(f)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 13. Dezember**.