Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
1. Dezember 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ eine zusammenhängende Überlagerung, die über genau zwei Punkten verzweigt ist.

Zeigen Sie: Y hat Geschlecht 0.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei Y vom Geschlecht g fest und sei $f\colon X \to Y$ eine unverzweigte zusammenhängende Überlagerung mit $\deg f = 2$.

Zeigen Sie: Es existieren genau $2^{2g} - 1$ paarweise nicht-isomorphe (als Überlagerungen über Y) Überlagerungen dieses Typs.

(b) Sei $Y := \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Geben Sie drei Untergitter $\Lambda_i \subsetneq \Lambda$ an, so dass $f_i\colon \mathbb{C}/\Lambda_i \to \mathbb{C}/\Lambda$ den drei nicht-isomorphen unverzweigten Grad-2-Überlagerungen entsprechen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $\omega := u\mathrm{d}z + v\mathrm{d}\overline{z}$, so gilt

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

(b) Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung und ω eine C^1-Form auf X.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige meromorphe 1-Form ω auf $\mathbb{P}^1$ gibt, die die 1-Form $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzt und dass $\operatorname{ord}_\infty \omega = -2$ ist.

(b) Sei $f\colon z \mapsto \frac{(z+1)^2}{z-1}$ und ω die Fortsetzung von $\mathrm{d}f$ auf $\mathbb{P}^1$.

Bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \omega$ für alle $p \in \mathbb{P}^1$.

(c) Sei $Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\}$.

Setzen Sie die Differentialform $\mathrm{d}x$ von $Y \setminus \{y = 0\}$ auf ganz Y fort und bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \mathrm{d}x$ für alle $p \in Y$.

Zeigen Sie außerdem, dass $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ eine holomorphe 1-Form auf Y ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 6. Dezember**.