Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
27. November 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{B}$ eine *Basis einer Topologie*, falls es für alle $x \in X$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in B$ ist und es für $x \in B_1 \cap B_2$ mit $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ein $B_3 \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(a) Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Basis einer Topologie. Wir setzen

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \coloneqq \{U \subseteq X \mid \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Zeigen Sie: $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ definiert eine Topologie auf X.

(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\}$ ist.

(c) Seien $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ Basen einer Topologie.

Zeigen Sie: $f\colon (X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}(X)}) \to (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{B}(Y)})$ ist genau dann stetig, wenn es für alle $x \in X$ und für alle $B' \in \mathcal{B}(Y)$ mit $f(x) \in B'$ ein $B \in \mathcal{B}(X)$ mit $x \in B$ und $B \subseteq f^{-1}(B')$ gibt.

(d) Seien X, Y topologische Räume und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von X.

Zeigen Sie: $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{U_i}$ für alle U_i, $i \in I$, stetig ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe, $\Gamma_r \coloneqq \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \mid \gamma_1 \cdots \gamma_r = 1 \rangle$ und $\theta\colon \Gamma_r \to G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Seien weiterhin $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^1$ paarweise verschiedene Punkte und $\pi_G\colon X_G \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ die unverzweigte Überlagerung, die zu $\operatorname{Kern} \theta$ gehört.

Zeigen Sie, dass G frei auf X_G operiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen, $f\colon X \to Y$ eine unverzweigte normale Überlagerung vom Grad d, $b \in Y$ und $f^{-1}(b)$ die Faser von b.

Zeigen Sie, dass die Monodromiegruppe auf $f^{-1}(b)$ transitiv operiert.

(b) Sei Y eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und $\rho\colon \pi_1(Y, b) \to S_d$ ein Gruppenhomomorphismus, sodass das Bild transitiv auf $\{1, \dots, d\}$ operiert.

Zeigen Sie, dass eine unverzweigte zusammenhängende Überlagerung $f\colon X \to Y$ vom Grad d existiert, sodass $\rho(\pi_1(Y, b))$ isomorph zu $\operatorname{Mon}(f)$ ist. Zeigen Sie, dass diese Überlagerung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ vom Grad vier an, sodass die Gruppe $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$ die Monodromiegruppe der assoziierten Überlagerung ist.

(b) Sei $\hat{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ die Fortsetzung von

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{(z-1)^3}{z^2+1}.$$

Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte von $\hat{f}$ und die Monodromiedarstellung Mon der zu $\hat{f}$ assoziierten unverzweigten Überlagerung.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $f(\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R} \cup \infty$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 29. November**.