Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
16. November 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche von Geschlecht g und seien $p, p_1, \ldots, p_r \in X$ paarweise verschiedene Punkte, so dass $g + r > 1$.

Zeigen Sie, dass $\pi_1(X \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}, p)$ eine freie Gruppe in $2g + r - 1$ Erzeugern ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Finden Sie eine Triangulierung von S^2 mit genau 6 Ecken.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f \colon X \to \mathbb{C}$ holomorph.

Zeigen Sie: f ist konstant.

(b) Seien $\tau,\ \tau' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\Lambda \coloneqq \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z},\ \Lambda' \coloneqq \mathbb{Z} \oplus \tau'\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ Gitter.

Zeigen Sie: Eine nicht-konstante Abbildung $f \colon \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ ist genau dann holomorph, falls es ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$, ein $\beta \in \mathbb{C}$ und eine Abbildung

$$F \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \alpha z + \beta$$

gibt, so dass f der Abstieg von F auf die Quotienten ist.

(c) Geben Sie zwei Riemannsche Flächen $X,\ Y$ mit $g(X) = g(Y)$, aber $X \ncong Y$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $[G,G] \coloneqq \left\{ \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i] : n \in \mathbb{N},\ x_i, y_i \in G \right\} \subseteq G$.

(a) Zeigen Sie, dass $[G,G]$ ein Normalteiler in G ist und dass $G^{\mathrm{ab}} \coloneqq G/[G,G]$ abelsch ist.

Wir nennen $[G,G]$ den *Kommutatoruntergruppe* von G und G^{ab} die *Abelisierung*.

(b) Sei $\pi \colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die kanonische Projektion.

Zeigen Sie, dass G^{ab} die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Sei A eine abelsche Gruppe und $f \colon G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus; dann gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi \colon G^{\mathrm{ab}} \to A$ mit $\Phi \circ \pi = f$.

(c) Sei $D_n \coloneqq \langle r, s \mid r^n,\ s^2,\ (sr)^2 \rangle$ die Diedergruppe ($n \in \mathbb{N}$).

Schreiben Sie die Abelisierung D_n^{ab} als Produkt zyklischer Gruppen.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 22. November**.