Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
31. Januar 2018

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g und $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ von Ordnung n.

Zeigen Sie, dass die Fixpunkte $\mathrm{Fix}(\varphi)$

$$\#\,\mathrm{Fix}(\varphi) \le \frac{2g-2+2n}{n-1}$$

erfüllen und dass Gleichheit impliziert, dass $g(X/\langle\varphi\rangle) = 0$ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $g = g(X) \ge 2$ und Automorphismengruppe $G = \mathrm{Aut}(X)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $g(X/G) \ge 2$, so ist $\#G \le g - 1$.

(b) Zeigen Sie: Ist $g(X/G) = 1$, so ist $\#G \le 4(g - 1)$.

(c) Zeigen Sie die Hurwitz-Schranke: $\#G \le 84(g - 1)$.

(d) Zeigen Sie, dass eine Fläche mit $g = 2$ keinen Automorphismus von Ordnung 7 haben kann. Folgern Sie, dass die Hurwitz-Schranke nicht für jedes g angenommen wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche.

(a) Zeigen Sie die Wohldefiniertheit der bilinearen Abbildung

$$\mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X(-D)) \times \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \mathrm{H}^1(X, \Omega^1_X), \quad (\omega, f) \mapsto f\omega.$$

(b) Seien $D \ge D'$ Divisoren und $c^D_{D'}$, $w_{D',D'}$, i_D und $i_{D'}$ wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D)), \mathbb{C}) \arrow[r, "c^D_{D'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D')), \mathbb{C}) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X(-D)) \arrow[u, "i_D"] \arrow[r, "w_{D',D'}"] & \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X(-D')) \arrow[u, "i_{D'}"]
\end{tikzcd}$$

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 7. Februar**.