Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
11. Januar 2018

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Seien X, Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zu einer offenen Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeigen Sie: $f_*\mathcal{F}$ ist eine Garbe auf Y.

(b) Sei nun G eine abelsche Gruppe, $\{p\} \subset X$ mit konstanter Garbe $\underline{G}$ versehen und ι die Inklusion $\{p\} \hookrightarrow X$.

Beschreiben Sie die Schnitte der "Wolkenkratzer"-Garbe $\iota_*\underline{G}$ auf offenen Mengen, sowie ihre Halme.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei $\mathcal{F}$ eine Wolkenkratzergarbe (wie oben) auf X.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien X eine Riemannsche Fläche, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben auf X und $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenmorphismus. Sei weiterhin $\delta\colon\ \mathrm{H}^0(X, \mathcal{G}) \to \mathrm{H}^1(X, \operatorname{Kern}\varphi)$ der Verbindungsmorphismus.

Zeigen Sie: Zu $g \in \mathcal{G}(X)$ gibt es genau dann ein φ_X-Urbild, wenn $\delta(g) = 0$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{M}(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\colon \mathcal{M}(X)^\times \to \operatorname{Div}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty)) = 2$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$.

(c) Zeigen Sie: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty - 0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

Hinweis: Geben Sie zunächst einen nicht-konstanten globalen Schnitt an.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 17. Januar**.