Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
12. Juni 2017

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien V und W Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern} f = \{0\}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x + y, 3y - x + z, y + x) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\operatorname{Kern}(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis C von $\operatorname{Bild}(f)$.

(d) Ergänzen Sie B zu einer Basis B' des $\mathbb{R}^3$ und C zu einer Basis C' des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. B' und C' an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V, W K-Vektorräume, $I = \{1, \ldots, n\}$, $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv $\iff$ $[\{f(b_i) \mid i \in I\}] = W$.

(b) f ist injektiv $\iff$ $\{f(b_i) \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die $n \times n$-Matrizen

$$M_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit Nullen außerhalb der Diagonalen und Einsen auf der Diagonalen mit Ausnahme des i-ten Eintrag, welcher gleich λ ist, bzw. mit Einsen an den Einträgen $(i,j), (j,i)$ und (k,k) für $k \notin \{i,j\}$ sowie Nullen außerhalb. Sei weiterhin

$$e_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

die Matrix, deren einziger von Null verschiedener Eintrag λ an der Stelle (i,j) ist und schließlich

$$E_{ij}(\lambda) = E_n + e_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie, dass Linksmultiplikation von $M_i(\lambda)$, V_{ij} und $E_{ij}(\lambda)$ die entsprechenden Gaußschritte auf A anwendet.

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \\ 7 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie mit Hilfe des Gaußverfahrens eine Matrix B an, so dass BA die Einheitsmatrix ist.

Abgabe bis **12:00** am **Freitag, den 23. Juni** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.