Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
29. Mai 2017

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe von Vektorrechnung: Wenn sich die Diagonalen eines ebenen Vierecks gegenseitig halbieren, handelt es sich um ein Parallelogramm (d.h. die Differenzen von zwei benachbarten Eckpunkten geben jeweils, bis auf ein Vorzeichen, den gleichen Vektor).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 6}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}^6$ des homogenen LGS $Ax = 0$.

(b) Bestimmen Sie $\dim \mathbb{L}$ und geben Sie eine Basis B von $\mathbb{L}$ an.

(c) Ergänzen Sie B zu einer Basis des $\mathbb{Q}^6$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Elementen aus V linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden.

(a) $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n)$;

(b) $(v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \dots + v_n)$.

Ergänzen Sie jeweils die linear unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Überprüfen und begründen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$;

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$;

(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 0$.

Abgabe bis **12:00** am **Freitag, den 9. Juni** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.