Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
30. Juni 2017

Geometrie L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zu einer gegebenen Ellipse

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wollen wir die orthoptische Kurve bestimmen, d.h. die Menge aller Schnittpunkte orthogonaler Tangenten an E.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Für $P \in E$ sei $\mathfrak{m}(P)$ die Steigung der Tangente T_P durch P an E.

Zeigen Sie, dass, für $m \in \mathbb{R}$,

$$c_\pm(m) := \left(-\frac{ma^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right) \in E$$

die zwei Punkte der Ellipse mit Tangentensteigung m sind, d.h. $\mathfrak{m}(c_\pm(m)) = m$.

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente durch den Punkt $c_\pm(m)$ durch

$$T_{c_\pm} : y = mx \pm \sqrt{m^2a^2+b^2}$$

gegeben ist.

(c) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Steigungen m der Tangenten an E durch (x_0, y_0) die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$m^2(x_0^2 - a^2) - 2x_0y_0m + y_0^2 - b^2 = 0$$

sind.

(d) Folgern Sie, dass die orthoptische Kurve zu E gerade durch den Kreis

$$O : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben Seien die Dreiecke $\Delta = \Delta(ABC) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Delta' = \Delta(A'B'C') \subset \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten

$$A = (0,0), \quad B = (2,1), \quad C = (1,3) \quad \text{und} \quad A' = (1,0), \quad B' = (-1,1), \quad C' = (0,3).$$

Zeigen Sie, dass Δ und Δ' die Vorraussetzungen des kleinen Satz von Desargues erfüllen und geben Sie die Gleichung der Geraden g an, die durch die Schnittpunkte $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ und $BC \cap B'C'$ verläuft.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K : x^2 + y^2 = 1$ der Einheitskreis und seien

$$\begin{array}{lll} A_1 = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)), & A_2 = (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)), & A_3 = (\cos(5\pi/6), \sin(6\pi/6)), \\ B_1 = (\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6)), & B_2 = (\cos(9\pi/6), \sin(9\pi/6)), & B_1 = (\cos(7\pi/6), \sin(7\pi/6)) \end{array}$$

Punkte auf K. Bestimmen Sie die Schnittpunkte

$$Q_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad Q_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1 \quad \text{und} \quad Q_{23} := A_2B_3 \cap A_3B_2$$

und geben Sie die Gleichung der Geraden g an, die durch alle drei Schnittpunkte verläuft.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, die

(a) das Verbindungsaxiom und die Existenz von Parallelen erfüllt, aber das Reichhaltigkeitsaxiom verletzt;

(b) das Reichhaltigkeitsaxiom und die Existenz von Parallelen erfüllt, aber das Verbindungsaxiom verletzt;

(c) das Verbindungsaxiom und das Reichhaltigkeitsaxiom erfüllt, aber die Existenz von Parallelen verletzt.

Abgabe bis **12:00** am **Freitag, den 14. Juli** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.