Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung.

(a) Seien ferner $A \subseteq B$ nullteilerfrei.

Zeige: A ist genau dann ein Körper, wenn B ein Körper ist.

(b) Seien $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subset B$ Primideale, so dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ gilt.

Zeige: Dann ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ eine ganze Ringerweiterung ist.

(c) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal.

Zeige: Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, so dass $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ ist.

Hinweis: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

(d) Folgere, dass es zu jeder Primidealkette

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subset A$$

und jeder Primidealkette

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \subset B \quad \text{mit } m < n \text{ und} \quad \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i,$$

Primideale $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n \subset B$ gibt, sodass $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $r = \dim Y$ und Hilbertpolynom P_Y definieren wir das *arithmetische Geschlecht* $g_a(Y) = (-1)^r(P_Y(0) - 1)$.

(a) Zeige: $g_a(\mathbb{P}^n) = 0$.

(b) Zeige: Ist $Y \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve mit $\deg Y = d$, dann ist $g_a(Y) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

(c) Sei Y der vollständige Durchschnitt zweier Flächen von Grad a und b in $\mathbb{P}^3$. Zeige:

$$g_a(Y) = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $\mathrm{PGL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)/k^*$. Zeige: $\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

(b) Sei $A \in \mathrm{PGL}_3(k)$. Zeige: $\mathrm{PGL}_3(k)$ operiert zweifach transitiv auf $\mathbb{P}^2$, d.h. für gegebene Punkte x, y und p, q existiert ein $A \in \mathrm{PGL}_3(k)$, sodass $A(x) = p$ und $A(y) = q$.

(c) Sei nun $\mathcal{C} = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve und $P \in \mathcal{C}$ ein regulärer Punkt.

Zeige: Die Tangente an $\mathcal{C}$ durch P ist

$$\overline{T_p\mathcal{C}} = l_p = Z\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y + \frac{\partial f}{\partial z}(p)z\right).$$

Hinweis: Zeige zunächst: für homogenes f ist $\deg f \cdot f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$.

(d) Zeige, dass es eine Gerade in $\mathbb{P}^2$ gibt, die $\mathcal{C}$ transversal (d.h. nicht tangential und in keiner Singularität) schneidet.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

(a) Berechne den Grad der Segre-Einbettung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^3$.

(b) Berechne den Grad der getwisteten Kubik in $\mathbb{P}^3$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14 Uhr** am **Mittwoch, den 2. Dezember**.