Übungen zur Linearen Algebra

Weihnachtsblatt

Dozent: Prof. M. Möller — 18.12.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (2 Bonuspunkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass SAT die Form $I_r \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $1 \leq r \leq 3$ hat (I_r wie in Beweis von Satz 7.9).

(b) Betrachten Sie die Matrix A wie in Aufgabe 1, Blatt 5, als Matrix über $\mathbb{F}_2$. Finden Sie invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$, so dass SAT die Form $I_r \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$ mit $1 \leq r \leq 3$ hat (I_r wie in Beweis von Satz 7.9).

Übung 2 (2 Bonuspunkte)

Um die Geschenke effektiver verteilen zu können, bringt der Weihnachtsmann seinen Wichteln Lineare Algebra bei. Nach einer Vorlesung sind die Wichtel Hans und Tom verwirrt:

Hans: “Bei der Definition von Äquivalenzrelationen hat sich Onkel Santa doch viel zu umständlich angestellt!”

Tom: “Wieso?”

Hans: “Na, weil das Axiom (R) doch völlig überflüssig ist. Jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, ist doch automatisch auch reflexiv.”

Tom: “Ähhh?”

Hans: “Na, schau mal. Wenn $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X ist, dann gilt, da $\sim$ symmetrisch ist, für $a, b \in X : a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Wegen der Transitivität folgt aus $a \sim b$ und $b \sim a$ dann $a \sim a$. Also ist $\sim$ auch reflexiv.”

Tom: “Stimmt!”

(a) Nein, liebe Wichtel. Das stimmt nicht. Helfen Sie den Wichteln, indem Sie genau erklären, an welcher Stelle der Beweis falsch ist.

(b) Um die Wichtel entgültig zu überzeugen, geben Sie ein weihnachtliches Beispiel für eine symmetrische, transitive, aber nicht reflexive Relation an.

— bitte wenden —

Übungen zur Linearen Algebra

Weihnachtsblatt

Dozent: Prof. M. Möller 18.12.2014
Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 3 (4 Bonuspunkte, für jede richtig bearbeitete Teilaufgabe 0,5 Punkte, für jede falsch beantwortete Teilaufgabe werden 0,5 Punkte abgezogen)
Machen Sie sich Gedanken über die folgenden Aussagen. Beantworten Sie jeweils die Frage, ob die Aussage so korrekt oder falsch ist und formulieren Sie eine Begründung Ihrer Antwort (dies kann (je nach Aussage) durch Verweis auf eine bewiesene Aussage der Vorlesung, durch einen kurzen Beweis, durch ein Beispiel oder Gegenbeispiel, etc. geschehen). Ist die Aussage so nicht korrekt, formulieren Sie eine korrigierte Version der Aussage.
(Die Aussagen sind genau so gemeint, wie sie hier stehen.)

(a) Die Basis des $\mathbb{R}^2$ ist $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$.

(b) Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W und sind $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig, so sind auch $f(v_1), f(v_2) \in W$ linear unabhängig.

(c) Ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ surjektiv, so ist f automatisch bijektiv.

(d) Es gibt Vektorräume mit nur endlich vielen Elementen.

(e) Bei jedem Schritt des Gaußalgorithmus wird der Rang der Matrix um mindestens 1 größer.

(f) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear. Dann ist f genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ gilt.

(g) Für A, B invertierbare Matrizen sind auch $A \cdot B$ und $A + B$ invertierbar.

(h) Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$, falls $b = 0$ gilt.

(i) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen mit $ABAB = 0$, so gilt $BABA = 0$.

(Tipp: Bei Aussagen, bei denen Sie sich nicht sicher sind, ob sie wahr sind, probieren Sie sie an ein paar Beispielen aus.)

Übung 4 (2 Bonuspunkte) Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

— bitte wenden —

Übungen zur Linearen Algebra

Weihnachtsblatt

Dozent: Prof. M. Möller 18.12.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 5 (3 Bonuspunkte) Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{pmatrix}$$

gleich

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(2x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (x_n - 1))$$

ist.

Übung 6 (3 Bonuspunkte) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphisms. Wir nennen φ *nilpotent*, wenn $\varphi^n = 0$ für ein $n \ge 0$ gilt. Zeigen Sie: Ist φ nilpotent, so gibt es eine Basis B von V, für die die Abbildungsmatrix Φ von φ bezüglich B (in Definitionsbereich und Bildbereich) echte obere Dreiecksgestalt hat und es gilt $\Phi^{\dim V} = 0$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Betrachten Sie die Kette $0 \subseteq \ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2 \subseteq \ldots \subseteq \ker \varphi^N = V$. Zeigen Sie, wenn N minimal gewählt ist mit $\varphi^N = 0$, dann sind die Inklusionen in jedem Schritt echt.

(b) Wählen Sie eine Basis von $\ker \varphi$ und ergänzen Sie diese sukzessive entlang der obigen Kette zu einer Basis B von V.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildungsmatrix von φ bezüglich B die gewünschten Eigenschaften hat.

Hinweis zu (a): Es gilt $\ker \varphi^{n+2} = \{x \in V \mid \varphi(x) \in \ker \varphi^{n+1}\}$. Was passiert jetzt, wenn $\ker \varphi^n = \ker \varphi^{n+1}$?

Das Team der Linearen Algebra wünscht Ihnen
frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind Bonusaufgaben. Sie können diese bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 15.01.2015**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgeben. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten. Bitte geben sie diese Bonusaufgaben getrennt von Blatt 10 ab.