Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. M. Möller — 06.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (4 Punkte)

(a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 4-i \\ 2+2i & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie ihre Inverse.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 73 \\ 0 & x & 257\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen ihre Inverse.

Übung 2 (4 Punkte) Wir nennen eine quadratische Matrix über einem Körper *Permutationsmatrix*, wenn sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen enthält. Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P(K^{n\times n}) := \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist eine Permutationsmatrix}\}.$$

Für jedes $\pi \in S_n$ sei $A_\pi := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $a_{ij} := \delta_{i\pi(j)}$.
Hierbei ist $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ das *Kronecker-Delta*.
Offenbar ist $A_\pi \in P(K^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass für alle $\pi, \rho \in S_n$ gilt:

$$A_{\pi\circ\rho} = A_\pi \cdot A_\rho.$$

Übung 3 (4 Punkte) Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 & 0 & 2 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -18 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 8}$$

Bringen Sie A in Zeilenstufenform und bestimmen Sie die Lösungmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

— bitte wenden —

Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. M. Möller 06.11.2014

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 4 (4 Punkte) Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass wenn das Gleichungssystem $Ax = 0$ eine nicht-trivale Lösung in $\mathbb{R}^n$ hat, es auch eine nicht-triviale Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $x_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n$ gibt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 13.11**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.