Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 13

Dozent: Prof. M. Möller — 29.01.2015
Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (3 Punkte) Seien $\varpi \in \mathbb{C}$ und $A, J \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varpi & 1 & 0 \\ 0 & \varpi^2+1 & 1 \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche ϖ gibt es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $T^{-1}AT = J$?

Übung 2 (3 Punkte) Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit der Eigenschaft, dass jeder von 0 verschiedene Vektor $v \in V$ ein Eigenvektor von φ ist. Wie sieht die Jordansche Normalform von φ aus?

Übung 3 (3 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\varphi^4(x) = 12\varphi^3(x) - 45\varphi^2(x) + 50\varphi(x)$$

für alle $x \in V$. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von φ an.

Übung 4 (4 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis von A.

Übung 5 (3 Punkte) Sei

$$V_n := \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich n und

$$d : V_n \to V_n\,,\ P \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}P(X).$$

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis von d.

(b) Zeigen Sie, dass d nilpotent ist. (Vgl. Aufgabe 6, Weihnachtsblatt).

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 05.02.2015**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.