Übungen zur Linearen Algebra

Übungsblatt 11

Dozent: Prof. M. Möller — 15.01.2015

Übungen: Dr. R. Butenuth

Übung 1 (6 Punkte) Sei $\zeta \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \zeta & 2-\zeta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3\zeta - 6 & 6 - 3\zeta & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte λ sowie die zugehörigen Eigenräume $E_\lambda(A)$ und das Minimalpolynom von A.

Übung 2 (4 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ heisst Projektion, falls $f \circ f = f$ gilt (vgl. Blatt 7, Aufgabe 2). Welche $\lambda \in K$ können als Eigenwerte einer Projektion vorkommen?

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte die selben Eigenwerte haben. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

Übung 3 (2 Punkte) Seien $(R, +, \cdot)$ und $(R', +', \cdot')$ Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \to R'$ heißt Ringhomomorphismus, falls für alle $x, y \in R$ gilt $\varphi(x + y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$ und $\varphi(1_R) = 1_{R'}$. Zeigen Sie, dass für $\lambda \in K$ die Abbildung

$$\mathrm{ev}_\lambda : K[x] \to K \ , \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Übung 4 (4 Punkte) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & & & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n},$$

und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Dieses Blatt kann bis spätestens **10:00 Uhr** am **Donnerstag, den 22.01.2015**, im Postfach des Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihre Namen und Ihre Matrikelnummern mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Tacker, zusammen zu halten.