Elementarmathematik I

Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 31.01.2020

Übungen: F. Göbler

Die folgenden Aufgaben werden in der Übung bearbeitet und nicht abgegeben.

Übung 1 (Präsenzaufgabe)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} k^3 =\Big) 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Übung 2 (Präsenzaufgabe)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ erfüllt ist:

$$2^n \geq n^2.$$

Dabei ist die Schreibweise in Klammern mit dem Summensymbol als Hilfestellung gedacht und kann bei akkuter Verwirrung getrost ignoriert werden.

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben und werden bewertet.

Übung 3 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} 3k-2 =\Big) 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < |q| < 1$ gegeben. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} q^k =\Big) 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Übung 5 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} k(k+1) =\Big) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Übung 6 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$2^n \geq n + 1.$$

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Wiederholung gedacht und werden nicht abgegeben.

Übung 7 (Wiederholung)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c \neq 0$ gegeben. Geben Sie eine stückweise lineare Darstellung der Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |ax + b| + |cx + d|$$

an.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Freitag, den 14.02.2020**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.