Elementarmathematik I

Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 24.01.2020
Übungen: F. Göbler

Die folgenden Aufgaben werden in der Übung bearbeitet und nicht abgegeben.

Übung 1 (Präsenzaufgabe)
Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen die Umkehrabbildung, falls diese existiert.

a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.

c) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = n - 1$.

d) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.

e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 2$.

f) $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = 3x^2$.

Übung 2 (Präsenzaufgabe)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 =\right) 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Dabei ist die Schreibweise in Klammern mit dem Summensymbol als Hilfestellung gedacht und kann bei akkuter Verwirrung getrost ignoriert werden.

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben und werden bewertet.

Übung 3 (4 Punkte)
Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung

$$f : [a, \infty) \longrightarrow [1, \infty), \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$$

gegeben. Bestimmen Sie den Wert von a, für den f bijektiv ist und bestimmen Sie anschließend die Umkehrabbildung.

Übung 4 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ erfüllt ist:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k =\right) 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Übung 5 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ erfüllt ist:

$$\Big(\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})=\Big)\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{n}.$$

Übung 6 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ erfüllt ist:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}4k-1=\Big)3+7+11+\ldots+(4n-1)=2n^2+n.$$

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Wiederholung gedacht und werden nicht abgegeben.

Übung 7 (Wiederholung)
Bestimmen Sie **mit quadratischer Ergänzung** den Scheitelpunkt für folgende quadratische Gleichungen:

- $x^2 - 2x + 5$
- $3x^2 + 6x + 8$
- $2x^2 - 10$
- $x^2 + px + q$
- $ax^2 + bx + c$, wobei $b \neq c$

Übung 8 Wie viele Paare $(x, f(x))$ müssen Sie kennen, um eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ bestimmen zu können?

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Freitag, den 07.02.2020**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.