Elementarmathematik I

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 17.01.2020
Übungen: F. Göbler

Die folgenden Aufgaben werden in der Übung bearbeitet und nicht abgegeben.

Übung 1 (Präsenzaufgabe)
Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1|$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x - 1| + |x + 1|$. Zeichnen Sie zunächst die Graphen Γ_f und Γ_g. Sie werden erkennen, dass sich die Graphen in Abschnitte unterteilen lassen, die jeweils (einem Abschnitt einer) linearen Abbildung $ax + b$ entsprechen. Geben Sie jeweils für jeden dieser Abschnitte eine Abbildungsvorschrift an.

Übung 2 (Präsenzaufgabe)
Gegeben sei die Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $X, Y \subseteq A$. Zeigen Sie die Inklusion

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Geben Sie außerdem ein Beispiel für X und Y an, in dem die Inklusion echt ist, also $f(X) \cap f(Y) \nsubseteq f(X \cap Y)$.

Die folgenden Aufgaben sind abzugeben und werden bewertet.

Übung 3 (4 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Gehen Sie vor wie in Übung 1.

Definition 0.1 *Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Übung 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine streng monoton wachsende Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist.

Übung 5 (4 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $X, Y \subseteq A$. Beweisen Sie die Mengengleichheit

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y).$$

Definition 0.2 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und $M \subseteq B$. Dann heißt die Menge $f^{-1}(M) := \{a \in A \mid f(a) \in M\}$ das **Urbild** von M unter f.*

Übung 6 (4 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $M, N \subseteq B$. Zeigen sie folgende Eigenschaften des Urbildes:

1. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
2. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Wiederholung gedacht und werden nicht abgegeben.

Übung 7 (Wiederholung)
Finden Sie Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) f ist nicht surjektiv.

(ii) g ist nicht surjektiv.

(iii) $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

Übung 8 Bringen Sie die folgenden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie den gesamten Ausdruck so weit wie möglich.

1. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.
2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.
3. $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Freitag, den 31.01.2020**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.