

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I
Übungsblatt 9

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: F. Göbler

Übung 1 (Präsenz)

Ein geringter Raum ist ein Paar (X, \mathcal{O}_X) bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen \mathcal{O}_X auf X . Ein Morphismus von geringten Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und aus einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. (X, \mathcal{O}_X) heißt lokal geringter Raum, falls $\mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Ring ist für alle $P \in X$. Ein Morphismus $(f, f^\#)$ von lokal geringten Räumen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) ist ein Morphismus von geringten Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist für alle $P \in X$.

Zeige:

- (a) Ist A ein Ring, so ist $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum.
- (b) Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen, so induziert φ einen Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}) .$$

- (c) Sind A und B Ringe, so ist jeder Morphismus von lokal geringten Räumen von $\text{Spec}(B)$ nach $\text{Spec}(A)$ induziert durch einen Homomorphismus von Ringen $\varphi : A \rightarrow B$ wie in b).

Übung 2 (Abgabe)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann ist $\text{Spec}(R)$ ein affines Schema, das aus zwei Punkten besteht. Ein abgeschlossener Punkt t_0 mit lokalem Ring R und ein Punkt t_1 , der offen und dicht ist, mit lokalem Ring $K = \text{Quot}(R)$. Zeige, dass der Morphismus von geringten Räumen, der den eindeutigen Punkt von $\text{Spec}(K)$ auf t_0 abbildet, wobei $f^\#$ vermöge der Inklusion $R \rightarrow K$ definiert ist, nicht von einem Ringhomomorphismus $R \rightarrow K$ induziert wird.

Übung 3 (Abgabe)

Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) heißt reduziert, falls für alle offenen Mengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nilpotenten Elemente hat.

- (a) Zeige: (X, \mathcal{O}_X) reduziert genau dann, wenn $\mathcal{O}_{X,P}$ keine nilpotenten Elemente hat für alle $P \in X$.
- (b) Sei $(\mathcal{O}_X)_{\text{red}}$ die Garbe assoziiert zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\text{red}}$ (für einen Ring A sei A_{red} der Quotient von A nach dem Ideal der nilpotenten Elemente). Zeige, dass $(X, (\mathcal{O}_X)_{\text{red}})$ ein Schema ist, man nennt es das reduzierte Schema assoziiert zu X . Zeige, dass weiterhin ein Morphismus $X_{\text{red}} \rightarrow X$ existiert, der ein Homöomorphismus der zugrunde liegenden topologischen Räume ist.

- (c) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit X reduziert. Zeige, dass eine eindeutige Abbildung $g : X \rightarrow Y_{\text{red}}$ existiert, so dass man f durch Komposition von g mit der natürlichen Abbildung $Y_{\text{red}} \rightarrow Y$ erhält.

Übung 4 (Abgabe)

- (a) Sei R ein normaler Integritätsbereich und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal der Kodimension 1. Man zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring ist.
- (b) Sei X eine normale Varietät und $D \subset X$ ein Primdivisor (eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät der Kodimension 1). Zeige, dass $\mathcal{O}_{X,D}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

Bemerkung: $\text{Div}(X)$ ist definiert als die freie abelsche Gruppe, die von allen Primdivisoren auf X erzeugt wird. Elemente dieser Gruppe heißen Weil-Divisoren.

Übung 5 (Abgabe)

Sei X eine normale Varietät und $f \in K(X)^*$. Zeige, dass $\nu_D(f)$ für alle außer endlich vielen Primdivisoren $D \subset X$ verschwindet.