Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)

(a) Zeige, dass man auf $\operatorname{Spec}(A)$ eine Garbe $\mathcal{O}$ erhält, indem man $\mathcal{O}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset \operatorname{Spec}(A)$ definiert als die Menge aller $s : U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ mit $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ und der Eigenschaft, dass für alle $\mathfrak{p} \in U$ eine Umgebung $U \supset V \ni \mathfrak{p}$ existiert, sodass für alle $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $A_{\mathfrak{q}}$.

(b) Es gilt $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$ für alle $f \in A$.

(c) Insbesondere gilt $\Gamma(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}) \cong A$.

Übung 2 (Abgabe)
Sei A ein Ring und $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ sein Spectrum. Zeige, dass für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ der Halm $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der Garbe $\mathcal{O}$ isomorph ist zum lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$.

Übung 3 (Abgabe)
Seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ Garben abelscher Gruppen auf X. Zeige, dass für eine offene Menge $U \subset X$ die Menge $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ eine abelsche Gruppe ist. Zeige, dass die Prägarbe $U \mapsto \operatorname{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ eine Garbe ist. Sie wird Garbe der lokalen Homomorphismen von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ genannt, man schreibt auch $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

Übung 4 (Abgabe)
Zeige: gegeben eine Prägarbe $\mathscr{F}$, existiert eine Garbe $\mathscr{F}^+$ und ein Morphismus $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ mit der Eigenschaft, dass für jede Garbe $\mathscr{G}$ und jeden Morphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein eindeutiger Morphismus $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ existiert, sodass $\varphi = \psi \circ \theta$. Weiterhin ist das Paar $(\mathscr{F}^+, \theta)$ eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. $\mathscr{F}^+$ heißt die Garbe assoziiert zur Prägarbe $\mathscr{F}$.

Übung 5 (Abgabe)

(a) Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X. zeige, dass φ surjektiv genau dann ist, wenn folgendes gilt: für alle offenen Mengen $U \subset X$ und für alle $s \in \mathcal{G}(U)$ existiert eine Überlagerung $\{U_i\}$ von U und Elemente $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$, sodass $\varphi(t_i) = s|_{U_i}$ für alle i.

(b) Gib ein Beispiel eines surjektiven Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und einer offenen Menge U an mit der Eigenschaft, dass $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ nicht surjektiv ist.