Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Es sei R ein noetherscher Ring, $I, J \lhd R$. Dann existiert ein Ideal $J' \lhd R$ und eine natürliche Zahl m für welche $IJ = I' \cap J$ und $I' \supseteq I^m$. Für eine beliebige natürliche Zahl n gibt es $k \gg 0$ mit der Eigenschaft, dass $I^n \cdot J = I^k \cap J$. Man schreibe jetzt $L = \cap_{n=1}^{\infty} I^n$. Dann gilt $I^m \cdot L = L$ für all $m \in \mathbb{N}$.

Übung 2 (Präsenz)
(Krullscher Schnittsatz) Es sei R ein noetherscher Ring, $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ ein Ideal in R. Dann gilt $\cap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$. (Hinweis: benutze Nakamaya's Lemma).

Übung 3 (Abgabe)
Sei R ein Ring. Für ein Primideal $P \lhd R$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man

$$P^{(n)} := \{a \in R \mid ab \in P^n \text{ für ein } b \in R \setminus P\}$$

genannt die n-te symbolische Potenz von P. Zeige:

(a) $P^n \subset P^{(n)} \subset P$.

(b) $P^{(n)}$ ist P-primär.

(c) $P^{(n)} R_P = P^n R_P$.

Übung 4 (Abgabe)
Betrachte die folgenden Ringerweiterungen $R \subset R'$

- $\mathbb{R}[y] \subset \mathbb{R}[x, y]/(x^2 - y)$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 3)$

und finde

(a) ein Primideal $0 \neq P \lhd R$ mit einem eindeutigen Primideal $P' \lhd R'$, das über P liegt und $R'/P' \cong R/P$;

(b) ein Primideal $0 \neq P \lhd R$ mit einem eindeutigen Primideal $P' \lhd R'$, das über P liegt und $R'/P' \ncong R/P$;

(c) ein Primideal $0 \neq P \lhd R$, sodass es mehr als ein Primideal in R' gibt, das über P liegt.

Man nennt in diesen drei Fällen P verzweigt, träge und zerlegt.

Übung 5 (Abgabe)
Es seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, Y Hausdorffsch. Man zeige, dass die Untermenge $\Delta_{f,g} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ abgeschlossen ist. Zeige auch, dass diese Eigenschaft Hausdorffsch charakterisiert (wie läuft die richtige Umkehrung?).

Übung 6 (Abgabe)
Sei X eine affine Varietät gedacht als topologischer Raum (versehen mit der Zariski-Topologie τ). Zeige, dass für jede offene Menge $U \subseteq X$, der topologischer Raum $(U, \tau|_U)$ quasi-kompakt ist.

Übung 7 (Übung, schwer)
Es seien $V \subseteq X$ affine Varietäten mit $\mathrm{codim}_X V = e$, schreibe $P = I_X(V)$. Dann gilt $P^{(em)} \subseteq P^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Beachte: eine elementare Lösung dieser Übung ist veröffentlichungswürdig.