Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Definition 0.1 *Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Dann ist das Spektrum* $\operatorname{Spec} A$ *von A die Menge $\{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p}$ Primideal$\}$ zusammen mit der Topologie, deren abgeschlossene Mengen die Mengen*

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset I\}$$

für Ideale $I \subset A$ sind.

Übung 1 (Präsenz)
Es sei R eine endlich erzeugte K-Algebra über einem Körper K. Dann ist die Menge von abgeschlossenen Punkten in $\operatorname{Spec}(R)$ dicht bezüglich der Zariski-Topologie.

Übung 2 (Präsenz, UFDs)
Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Integritätsbereich R:

(a) Jedes Element $0 \neq r \in R$, das keine Einheit ist, ist ein Produkt von Primelementen.

(b) Jedes Element $0 \neq r \in R$, das keine Einheit ist, ist ein Produkt von irreduziblen Elementen und diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Permutation und Multiplikation mit einer Einheit.

(c) Jedes Element $0 \neq r \in R$, das keine Einheit ist, ist ein Produkt von irreduziblen Elementen und jedes irreduzible Element ist prim.

Übung 3 (Abgabe)
Zeige die folgende Aussage: R UFD impliziert $R[x]$ UFD.

Übung 4 (Abgabe)
Zeige, dass die folgenden Ringe UFDs sind:

- $\mathbb{R}[x,y]/(y-x^2)$ und $\mathbb{R}[x,y]/(xy-1)$
- $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$.

Übung 5 (Abgabe)
Finde eine minimale Primärzerlegung von

(a) $I = (\overline{x}^2)$ in $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$.

(b) $I = (6)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.

(c) $I = (x,y) \cdot (y,z)$ in $\mathbb{R}[x,y,z]$.

Übung 6 (Abgabe)
Zeige, Dass $\mathrm{Spec}(R)$ bezüglich der Zariski-Topologie quasi-kompakt ist.

Übung 7 (Übung, schwer)
Es sei $I_{n,d}$ das ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$, das von allen quadratfreien Monomen vom Grad d erzeugt wird. Bestimme die Primärzerlegung von seinen symbolischen Potenzen $I_{n,d}^{(m)}$.