

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I  
Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: M. Nickel

---

**Definition 0.1 (Ganz abgeschlossen und normal)** *Es seien  $A \leq B$  Ringe. Falls gilt: jedes Element  $b \in B$  ganz über  $A$  liegt automatisch in  $A$ , dann sagen wir, dass  $A$  ganz abgeschlossen in  $B$  ist. Ein Integritätsbereich ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper heißt ein normaler Ring. Eine irreduzible affine Varietät  $X$  heißt normal, falls ihr Koordinatenring  $K[X]$  ein normaler Ring ist.*

**Definition 0.2 (Normalisierung von affinen Varietäten)** *Es sei  $X$  eine affine Varietät mit Koordinatenring  $K[X]$ , man schreibe  $K[X]' =: K[Y]$  für seinen ganzen Abschluss in  $K(X)$ . Der Morphismus von Varietäten  $\nu_X: Y \rightarrow X$ , der der natürlichen Inklusion  $K[X] \hookrightarrow K[X]'$  entspricht, heißt die Normalisierung von  $X$ .*

**Übung 1** (Präsenz)

Zeigen Sie:

- (a) Ein UFD ist ein normaler Ring.
- (b) Lokalisierung kommutiert mit ganzem Abschluss. Insbesondere jede Lokalisierung von einem normalen Ring ist wieder normal.

**Übung 2** (Präsenz)

Beweise, dass die Definition der Normalisierung sinnvoll ist. Ohne Beweis:  $K[X]'$  ist eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra. Berechne die Normalisierung von  $V(x^2 - y^3)$ .

---

**Übung 3** (Abgabe)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ein Integritätsbereich  $R$  ist normal dann und genau dann, wenn  $R_{\mathfrak{m}}$  normal ist für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m} \triangleleft R$ .
- (b) Die Varietät  $V(x^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$  ist nicht normal.

**Übung 4** (Abgabe)

Es seien  $X, Y$  irreduzible affine Varietäten. Beweisen Sie, dass auch  $X \times Y$  irreduzibel ist. Zeigen Sie zunächst:  $K[X \times Y] = K[X] \otimes K[Y]$ .

**Übung 5** (Abgabe)

Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Zeige, dass  $X$  dann und genau dann Hausdorffsch ist, wenn  $\Delta \subseteq X \times X$  abgeschlossen ist bezüglich der Produkt-Topologie.

### Übung 6 (Abgabe)

Sei  $X$  die Menge aller  $2 \times 3$  Matrizen über einem Körper  $K$ , die höchstens Rang 1 haben, als Teilmenge von  $\mathbb{A}_K^6 = \text{Mat}(2 \times 3, K)$ . Zeige, dass  $X$  eine affine Varietät ist. Ist sie irreduzibel? Was ist ihre Dimension?

Im Folgenden benutzen wir die Verschwindungsordnung von Polynomen um die Geometrie affiner Varietäten zu studieren. Was wir machen ist eine Verallgemeinerung des Verschwindungsideals  $I(X)$  einer affinen Varietät (oder allgemeiner einer Teilmenge des affinen Raumes).

**Definition 0.3** (*Symbolische Potenzen von Verschwindungsideal*) Sei  $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$  eine affine Varietät. Wir definieren die  $m^{\text{te}}$  symbolische Potenz von  $I(X)$  als

$$I(X)^{\langle m \rangle} := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ verschwindet zur Ordnung } m \text{ auf } X\} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n].$$

Die Beziehung zwischen normalen und symbolischen Potenzen ist eine wichtige Frage, die bis heute nicht vollständig klar ist.

### Übung 7 (Abgabe)

Zeige, dass symbolische Potenzen in der Tat Ideale sind. Zeige, dass Potenzen und symbolische Potenzen von linearen Unterräumen übereinstimmen.