Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: F. Göbler

Übung 1 (Abgabe)
Sei $\widetilde{\mathbb{A}^3}$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^3$ in der Gerade $V(x_1, x_2) \cong \mathbb{A}^1$. Zeige, dass die exzeptionelle Menge isomorph zu $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist. Wann schneiden sich die strikten Transformationen von zwei Geraden in $\mathbb{A}^3$ durch $V(x_1, x_2)$ in der Aufblasung? Was ist demnach die geometrische Bedeutung der Punkte in der exzeptionellen Menge?

Übung 2 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und seien $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen, die sich gegenseitig nicht enthalten. Sei weiterhin $\widetilde{X}$ die Aufblasung von X im Ideal $I(Y_1) + I(Y_2)$. Zeige, dass die strikten Transformationen von Y_1 und Y_2 in $\widetilde{X}$ disjunkt sind.

Übung 3 (Präsenz)
Sei $I \triangleleft K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal mit der Eigenschaft, dass die korrespondierende affine Varietät $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ den Ursprung enthält. Betrachte die Aufblasung $\widetilde{X} \subset \widetilde{\mathbb{A}^n} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ in $x_1, \ldots, x_n$ und bezeichne die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^{n-1}$ mit $y_1, \ldots, y_n$.

(a) $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ kann durch affine Räume überdeckt werden, wobei eine Koordinatenumgebung davon folgende Gestalt hat

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\to \widetilde{\mathbb{A}^n} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}, \\ (x_1, y_2, \ldots, y_n) &\mapsto ((x_1, x_1 y_2, \ldots, x_1 y_n), [1 : y_2 : \cdots : y_n]). \end{aligned}$$

Zeige, dass auf dieser Koordinatenumgebung die Aufblasung $\widetilde{X}$ als die Nullstellenmenge der Polynome

$$\frac{f(x_1, x_1 y_2, \ldots, x_1 y_n)}{x_1^{\min\deg f}}$$

für alle $0 \neq f \in I$, gegeben ist. Dabei bezeichnet $\min\deg f$ den kleinsten Grad einens Monoms in f.

(b) Zeige, dass die exzeptionelle Hyperfläche von $\widetilde{X}$

$$V_p(f^{\text{in}} \mid f \in I) \subset \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

ist, wobei f^{in} der initiale Term von f ist, das heißt die Summe aller Monome in f von kleinstem Grad. Aus diesem Grund ist der Tangentialkegel von X im Ursprung

$$C_0 X = V_a(f^{\text{in}} \mid f \in I) \subset \mathbb{A}^n.$$

(c) Zeige im Fall $I = (f)$, dass $C_0 X = V_a(f^{\text{in}})$. Zeige, dass jedoch für ein allgemeines Ideal I im allgemeinen $C_0 X$ nicht die Nullstellenmenge einer Menge von Erzeugern von I ist.

Übung 4 (Abgabe)
Sei $X = V(x_2^2 - x_1^2 - x_1^3) \subset \mathbb{A}^2$. Zeige, dass X nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1$ ist, aber die Aufblasung von X im Ursprung schon.