Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya Übungen: F. Göbler

Übung 1 (Präsenz)
Sei $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ die Grad d Veronese Einbettung (Konstruktion 7.27) mit $N = \binom{n+d}{n} - 1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $X = F(\mathbb{P}^n)$ eine projektive Varietät ist. Finde explizite Gleichungen für X, das heißt Erzeuger eines homogenen Ideals I mit $X = V(I)$.

Übung 2 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{P}^3$ die Grad 3 Veronese Einbettung von $\mathbb{P}^1$, das heißt das Bild des Morphismus

$$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1] \mapsto [y_0 : y_1 : y_2 : y_3] = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3].$$

Sei weiterhin $a := [0 : 0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^3$ und $L = V(y_2) \subset \mathbb{P}^3$. Man betrachte die Projektion f von a nach L (siehe Beispiel 7.6 (b)).

(a) Zeige, dass f ein Morphismus ist.

(b) Bestimme eine Gleichung der Kurve $f(X)$ in $L \cong \mathbb{P}^2$.

(c) Ist $f : X \to f(X)$ ein Isomorphismus?

Übung 3 (Abgabe)
Sei $f : X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung. Zeige, dass es dann eine bezüglich der Inklusion maximale offene Menge $U \subset X$ gibt, auf welcher die Abbildung ein Morphismus ist.

Übung 4 (Präsenz)
Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Quadrik, das heißt eine irreduzible Varietät, die die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad 2 ist. Zeige, dass X birational, aber im Allgemeinen nicht isomorph, zu $\mathbb{P}^{n-1}$ ist.

Übung 5 (Präsenz)
Eine Varietät Y ist rational, falls sie birational äquivalent zu $\mathbb{P}^n$ für ein gewisses n ist (äquivalent dazu: K(Y) ist eine rein transzendente Erweiterung von K).

(a) Jeder Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$ ist eine rationale Kurve.

(b) $y^2 = x^3$ ist eine rationale Kurve.

(c) Sei Y die Kurve gegeben durch $y^2 z = x^2(x+z)$ in $\mathbb{P}^2$. Zeige, dass die Projektion φ vom Punkt $P = [0 : 0 : 1]$ auf die Gerade $z = 0$ eine birationale Abbildung von Y auf $\mathbb{P}^1$ induziert. Insbesondere ist Y eine rationale Kurve.

Übung 6 (Abgabe)
Eine birationale Selbstabbildung von $\mathbb{P}^2$ heißt ebene Cremona-Transformation. Ein Beispiel ist die sogenannte quadratische Transformation $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ gegeben durch $[a_0 : a_1 : a_2] \mapsto [a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1]$, wobei keine zwei Elemente von a_0, a_1, a_2 verschwinden sollen.

(a) Zeige, dass φ birational und seine eigene Inverse ist.

(b) Finde offene Mengen $U, V \subset \mathbb{P}^2$ mit $\varphi : U \to V$ Isomorphismus.

(c) Finde die offenen Mengen, auf denen φ und φ^{-1} definiert sind und beschreibe die korrespondierenden Morphismen.

Übung 7 (Abgabe)
Seien X, Y zwei Varietäten und seien $P \in X$ und $Q \in Y$ gegeben mit $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_{Y,Q}$ als K-Algebren. Zeige, dass es dann offene Mengen $P \in U \subset X$ und $Q \in V \subset Y$ gibt und einen Isomorphismus $U \to V$, der P auf Q abbildet.