Lineare Algebra zur Sekundarstufe I

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 21.06.2019
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sind die folgenden Tripel $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$-Vektorräume (mit Beweis)?

(a) Die Menge V der Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusammen mit $+, \cdot$ definiert durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$ für $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ zusammen mit $+, \cdot$ definiert durch $(x, y) + (u, v) := (xu, yv)$ und $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$ für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $V := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ für $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V_1, +_1, \cdot_1)$ und $(V_2, +_2, \cdot_2)$ zusammen mit $+, \cdot$ definiert durch $((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) := (v_1 +_1 w_1, v_2 +_2 w_2)$ und $\lambda \cdot (v_1, v_2) = (\lambda \cdot_1 v_1, \lambda \cdot_2 v_2)$ für $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ zusammen mit $+, \cdot$ definiert durch $x + y := x/y$ und $\lambda \cdot x := x^\lambda$ für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Übung 2 (4 Punkte)
Sind die folgenden Abbildungen linear (mit Beweis)?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, x - y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x + y - z + 10$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

(d) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z, u, v) \mapsto (v, y, v)$.

Übung 3 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen Untervektorräume sind (mit Beweis).

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Freitag, den 28.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.