Modulteilprüfung Lineare Algebra
L2M-GL/L5M-GL

Sommersemester 2019

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. A. Küronya
M. Nickel

30.06.2019

Dauer: 90 Minuten

Hilfsmittel: Stifte und ein einseitig **handbeschriebenes** DinA4-Blatt

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. **Füllen Sie auch beide Deckblätter aus!**
Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.
Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, müssen diese ebenfalls mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen werden. Bitte geben Sie die Anzahl der zusätzlich verwendeten Blätter unten an.
Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

☐ Dies ist eine letzmalig wiederholte Klausur und daher nach Teil III, Abschnitt 2, §15 (9) der Lehramtsstudienordnung von zwei Prüfenden zu bewerten.

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[20 Punkte]

Entscheiden Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel!), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Es sei (G, μ) eine Gruppe. Dann ist (G, ν) auch eine Gruppe, wo $\nu(g, h) := \mu(h, g)$.

   Beweis. Sei $e \in G$ das neutrale Element von (G, μ) und $g, h, i \in G$ beliebig. Es folgt:
   $$\nu(e, g) = \mu(g, e) = g = \mu(e, g) = \nu(g, e)$$
   $$\nu(g^{-1}, g) = \mu(g, g^{-1}) = e = \mu(g^{-1}, g) = \nu(g, g^{-1})$$
   $$\nu(i, \nu(g, h)) = \mu(\mu(h, g), i) = \mu(h, \mu(g, i)) = \nu(\nu(i, g), h)$$
   Damit ist auch (G, ν) eine Gruppe. □

2. Je zwei Geraden in $\mathbb{R}^4$ haben entweder gleiche Richtungsvektoren oder haben einen Schnittpunkt.

   Gegenbeispiel. Die Geraden
   $$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   besitzen keinen Schnittpunkt. □

3. Eine injektive lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ ist auch surjektiv.

   Beweis. Sei die Abbildung mit f bezeichnet. Da f injektiv ist gilt $\ker(f) = 0$, es folgt:
   $$\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim\ker(f) = n - 0 = n$$
   Also hat das Bild Dimension n und damit ist f surjektiv. □

4. Jede Gruppe mit sechs Elementen ist kommutativ.

   Gegenbeispiel. Die symmetrische Gruppe S_3 besitzt $3! = 6$ Elemente und ist nicht kommutativ. □

5. Falls $\phi^2 = \phi$ für eine lineare Abbildung, dann $\mathrm{Bild}\,\phi = \ker\phi$.

   Gegenbeispiel. Die Nullabbildung 0 ist linear und erfüllt $0^2 = 0$. Für einen nicht trivialen Vektorraum V gilt jedoch $\mathrm{Bild}(0) = 0 \neq V = \ker(0)$. □

Aufgabe 2

[20 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

$$\begin{aligned} 3x + 6y + (a+8)z &= 1 \\ 2x + (a+4)y + (2a+5)z &= 2 \\ 2x + 4y + (a+5)z &= 3. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 3x + 6y + (a+8)z &= 1 && (i) \\ 2x + (a+4)y + (2a+5)z &= 2 && (ii) \\ 2x + 4y + (a+5)z &= 3 && (iii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-a+1)z &= -7 && 2(i) - 3(iii) \\ ay + az &= -1 && (ii) - (iii) \\ 2x + 4y + (a+5)z &= 3 \end{aligned}$$

□

Für $1 - a = 0$ und $a = 0$ gibt es keine Lösung. Ansonsten lässt sich auflösen:

$$\begin{aligned} z &= \frac{7}{a-1} \\ y &= \frac{1}{a}(-1 - az) = \frac{1}{a}(-1 - \frac{7a}{a-1}) = \frac{1-8a}{a(a-1)} \\ x &= \frac{1}{2}(3 - 4y - (a+5)z) = \frac{1}{2}(3 - 4\frac{1-8a}{a(a-1)} - (a+5)\frac{7}{a-1}) \\ &= \frac{1}{2a(a-1)}(3a(a-1) - 4 + 32a - 7a^2 - 35a) = \frac{1}{2a(a-1)}(-4a^2 - 6a - 4) \\ &= \frac{-2a^2 - 3a - 2}{a(a-1)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

[20 Punkte]

Sei $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge der linearen Abbildungen $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Auf $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ betrachte man punktweise Skalarmultiplikation und Addition, das heißt für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ setzt man

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto \lambda \cdot f(x) \\ f + g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) + g(x). \end{aligned}$$

1. Geben Sie einen Beweis dafür an, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.
2. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Beweis.

1. Die Nullabbildung ist das neutrale Element bezüglich Addition. Assoziativität und Kommutativität der Addition ist gegeben, da dies Werteweise auf $\mathbb{R}^m$ gegeben ist, genauso die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.
2. Nach der Wahl einer Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ lässt sich jede lineare Abbildung eindeutig als $m \times n$-Matrix schreiben. Es folgt:

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$$

□

Aufgabe 4

[20 Punkte]

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie den Rang von A an.
2. Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A.

Beweis.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \\ (iv) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (i) \\ (ii) - \frac{2}{3}(i) \\ (iii) - \frac{1}{3}(i) \\ (iv) - \frac{5}{3}(i) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) - (ii) \\ (iv) - (ii) \end{matrix}$$

Die ersten drei Zeilen sind linear unhabhängig. Der Rang von A ist also 3.

2. Die Zeilenumformungen aus Teil 1 ändern an dem Kern nichts. Wir können als folgende Gleichung betrachten:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} w &= -z \\ x &= -z \\ y &= \frac{1}{2}z - 2x = \frac{5}{2}z \end{aligned}$$

Also ist der Kern gegeben durch den Spann von

$$\ker A = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$\square$

Aufgabe 5

[20 Punkte]

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Gruppe S_4 hat ein Element der Ordnung 4.
2. Die Gruppe S_4 hat kein Element der Ordnung 5.

Beweis.

1. Das in Zykelschreibweise gegebene Element $(1, 2, 3, 4) \in S_4$ hat Ordnung 4, die Ordnung eines Zykels entspricht seiner Länge.
2. S_4 besteht aus folgenden $4! = 24$ Elementen:

$$\begin{aligned}
&id\\
&(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),\\
&(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4),(1,3,2),(1,4,2),(1,4,3),(2,4,3),\\
&(1,2,3,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(4,3,2,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),\\
&(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3),
\end{aligned}$$

Disjunkte Zykel kommutieren, also entspricht die Ordnung des Produkts solcher dem kgV der einzelnen Ordnungen. Entsprechend gibt es kein Element der Ordnung 5. □