Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 8

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 18.06.2019
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie das 5er Lemma: sei R ein Ring und sei

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "\psi_1"] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r, "\psi_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Dann gilt:

- Wenn f_2 und f_4 injektiv und f_1 surjektiv sind, dann ist f_3 injektiv.
- Wenn f_2 und f_4 surjektiv und f_5 injektiv sind, dann ist f_3 surjektiv.
- Wenn f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen sind, dann auch f_3.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei R ein Ring. Zeigen Sie: zu R-Moduln $M_i, i \in I$ existiert ein R-Modul $\bigoplus_{i\in I} M_i$ zusammen mit injektiven Modulhomomorphismen $\iota_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit folgender universeller Eigenschaft:
zu jedem R-Modul T und R-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \to T$ für alle $i \in I$ gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to T$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ (universelle Eigenschaft der Summe von R-Moduln).

Übung 3 (4 Punkte)
Sei R ein lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Seien $x_i, 1 \leq i \leq n$ Elemente von M, deren Bilder in $M/\mathfrak{m}M$ eine Basis des $R/\mathfrak{m}$-Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Zeigen Sie, dass M von den x_i erzeugt wird.

Übung 4 Sei $R = \prod_{i=1}^{n}$ das direkte Produkt der Ringe R_i. Zeigen Sie, dass Spec(R) die disjunkte Vereinigung von offenen (und abgeschlossenen) Teilräume X_i ist, wobei X_i kanonisch homöomorph zu Spec(R_i) ist.
Sei umgekehrt R ein beliebiger Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist unzusammenhängend.
2. $R \cong R_1 \times R_2$, wobei weder R_1, noch R_2 der Nullring ist.
3. R enthält ein idempotentes Element $\neq 0, 1$.
   Insbesondere ist das Spektrum eines lokalen Rings stets zusammenhängend.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Sei R ein Ring. Zeigen Sie: zu R-Moduln $M_i, i \in I$ existiert ein R-Modul $\prod_{i \in I} M_i$ zusammen mit surjektiven Modulhomomorphismen $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j$ mit folgender universeller Eigenschaft:
zu jedem R-Modul T und R-Modulhomomorphismen $f_i : T \to M_i$ für alle $i \in I$ gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $f : T \to \prod_{i \in I} M_i$ mit $f_i = \pi_i \circ f$ für alle $i \in I$ (universelle Eigenschaft des Produkts von R-Moduln).

Übung 6

Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, N ein Untermodul von M und I ein Ideal, das im Jacobson Radikal von R enthalten ist. Dann folgt aus $M = IM + N$, dass $M = N$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass das Jacobson Radikal von $R[x]$ das Nilradikal ist.

Übung 8

Sei R ein Ring, in dem für jedes Element $x^n = x$ für ein gewisses $n > 1$ (abhängig von x) gilt. Zeigen Sie, dass dann jedes Primideal von R maximal ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 25.06.** abgegeben werden.