Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

# Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 28.05.2019
Übungen: M. Nickel

---

**Übung 1** (4 Punkte)
Sei $0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$ eine exakte Sequenz von $k$-Vektorräumen. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim_k V_i = 0.$$

**Übung 2** (4 Punkte)
Sei $A$ ein lokaler Ring, $M$ und $N$ seien endlich erzeugte $A$-Moduln. Zeigen Sie, dass aus $M \otimes N = 0$ folgt, dass $M = 0$ oder $N = 0$. Benutzen Sie Übung 6 und das Nakayama Lemma.

**Übung 3** (4 Punkte)
Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $A$-Moduln mit $M'$ und $M''$ endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass dann $M$ endlich erzeugt ist.

**Übung 4** Sei $A$ ein Ring $\neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $A^n \cong A^m$ folgt, dass $m = n$. (Hinweis: sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $A$ und sei $\varphi : A^n \to A^m$ ein Isomorphismus. Man betrachte $1 \otimes \varphi : (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n \to (A/\mathfrak{m}) \otimes A^m$.)
Zeigen Sie, dass aus $\varphi : A^n \to A^m$ surjektiv folgt, dass $n \geq m$. Gilt auch stets, dass aus $\varphi : A^n \to A^m$ injektiv folgt, dass $n \leq m$?

**Präsenzaufgaben** *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

**Übung 5**
Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, falls $m$ und $n$ teilerfremd sind.

**Übung 6**
Sei $A$ ein Ring, $I$ ein Ideal, $M$ ein $A$-Modul. Zeigen Sie, dass $(A/I) \otimes_A M$ zu $M/IM$ isomorph ist. (Tensorieren Sie dazu die exakte Sequenz $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ mit $M$.)

**Zusatzaufgaben** *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

**Übung 7**
Sei $M_i, (i \in I)$ eine Familie von $A$-Moduln und sei $M$ deren direkte Summe. Zeigen Sie, dass $M$ genau dann ein flacher $A$-Modul ist, wenn alle $M_i$ es sind.

**Übung 8**
Sei $A[x]$ der Polynomring über einem Ring $A$. Zeigen Sie mithilfe der vorangehenden Übung, dass $A[x]$ eine flache $A$-Algebra ist.

**Übung 9**
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Ring $A$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}[x]$ ein Primideal in $A[x]$ ist. Gilt dies auch für maximale Ideale?

**Übung 10**
Sei $A$ ein Ring, $I$ ein Ideal, das im Jacobson Radikal von $A$ enthalten ist. Sei $M$ ein $A$-Modul, $N$ ein endlich erzeugter $A$-Modul und $u : M \to N$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $u$ surjektiv ist, falls der induzierte Homomorphismus $M/IM \to N/IN$ surjektiv ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 04.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.