Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 06.05.2019

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Seien $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ affine Varietäten und $\Delta = V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \subset \mathbb{A}^{2n}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \varphi : X \cap Y &\to (X \times Y) \cap \Delta \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen, $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$ als topologische Räume. Beweisen Sie:

(a) Ist $P \lhd S$ ein Primideal, so ist es auch $\varphi^{-1}(P) \subset R$. Daher ist

$$\begin{aligned} \varphi^* : Y &\to X \\ P &\mapsto \varphi^{-1}(P) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Funktion.

(b) Für $f \in R$ ist $(\varphi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$, insbesondere ist φ^* stetig bezüglich der Zariski-Topologie (siehe Übung 4).

(c) Für $I \lhd R$ gilt $(\varphi^*)^{-1}(V(I)) = V((\varphi(I)))$.

(d) Ist $J \lhd S$, so gilt $\overline{\varphi^*(V(J))} = V(\varphi^{-1}(J))$.

(e) Ist φ surjektiv, so ist φ^* ein Homöomorphismus zwischen Y und $V(\ker \varphi) \subset X$.

(f) $\operatorname{Spec} R$ und $\operatorname{Spec}(R/\operatorname{Nil}(R))$ sind homöomorph, wobei $\operatorname{Nil}(R)$ die Menge der nilpotenten Elemente von R bezeichne.

(g) Ist φ injektiv, so ist $\varphi^*(Y) \subset X$ dicht.

(h) $\varphi^*(Y) \subset X$ ist dicht genau dann, wenn $\ker \varphi \subset \operatorname{Nil}(R)$.

(i) Für einen Homomorphismus von Ringen $\psi : S \to T$ gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $A, B \subset X$ Teilmengen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{int}(A) = \{x \in X \mid \text{es existiert } U \subset X \text{ offen mit } x \in U \subset A\}$

(b) $\overline{A} = \{x \in X \mid \text{für alle } U \subset X \text{ offen mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \varnothing\}$

(c) A ist offen genau dann, wenn $A = \mathrm{int}(A)$ und A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\overline{A} = A$. Zeigen Sie weiterhin: $X \setminus \mathrm{int}(A) = \overline{X \setminus A}$ und $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$.

(d) Es gilt $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cap B)$ und $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(e)

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathrm{int}(A_\alpha) \supset \mathrm{int}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \mathrm{int}\left(\bigcap_{\alpha \in I} \mathrm{int}(A_\alpha)\right) \quad , \quad \bigcup_{\alpha \in I} \mathrm{int}(A_\alpha) \subset \mathrm{int}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

(f) Die Inklusion $A \subset B$ impliziert $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 4

Sei R ein RIng, $X := \operatorname{Spec} R$ als topologischer Raum und $f, g \in R$. Man definiert

$$X_f := \operatorname{Spec} R \setminus V(f).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) Die Teilmengen $X_f \subset X$ sind offen in der Zariski-Topologie.

(b) Die Kollektion $\{X_f \mid f \in R\}$ ist eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ (das heißt, dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen der Form X_f geschrieben werden kann).

(c) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

(d) $X_f = \varnothing$ genau dann, wenn f nilpotent ist.

(e) $X_f = X_g$ genau dann, wenn $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

(f) Jede offene Überdeckung von X_f hat eine endliche Teilüberdeckung.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Enthscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Eine endliche Vereinigung nirgends dichter Teilmengen ist nirgends dicht.

(b) Jeder endliche Schnitt dichter Teilmengen ist dicht.

(c) Sei X ein irreduzibler noetherscher topologischer Raum, $U \subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge. Ist $B \subset U$ dicht, so ist $B \subset X$ dicht.

(d) Das Bild einer irreduziblen Untervarietät von $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ unter einer regulären Abbildung ist irreduzibel.

(e) Das Bild einer irreduziblen Untervarietät von $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ unter einer regulären Abbildung ist eine irreduzible Untervarietät des Zielraums.

Übung 6
Seien X, Y affine Varietäten. Wie ist das Verhältnis der Zariski-Topologie auf $X \times Y$ und der Produkt Topologie?

Übung 7
Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann Hausdorffsch ist, wenn $\Delta(X) \subset X \times X$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 14.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.