Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 09.07.2019
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $\varphi : M \to A^n$ ein surjektiver Homomorphismus. Man zeige: $\ker(\varphi)$ ist endlich erzeugt.

Übung 2 (4 Punkte)
Seien R ein Ring, M endlich erzeugter R-Modul und φ ein R-Endomorphismus von M. Zeigen Sie, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn φ ein Isomorphismus ist. Hinweis: man fasse M als $R[X]$-Modul auf via $P(X)m := P(\varphi)(m)$ für $P(X) \in R[X], m \in M$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus (insbesondere ist B ein A-Modul), $M = A^n$ der freie A-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und N ein A-Modul. Zeigen Sie, dass $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \mathrm{id}$ einen B-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

induziert.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul. Man fasse N via f als A-Modul auf und betrachte den B-Modul $N_B := B \otimes_A N$. Zeigen Sie, dass der Homomorphismus $g : N \to N_B, y \mapsto 1 \otimes y$ injektiv ist und dass $g(N)$ ein direkter Summand in N_B ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
(Konstruktion eines Gegenbeispiels zu Übung 3, falls M nicht frei ist.)
Sei K ein Körper und $R = K[X, Y]/(XY, Y^2)$. Weiterhin sei $f : R \to K$ gegeben durch

$$[\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j] \mapsto a_{00}.$$

Zeigen Sie, dass der durch $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \mathrm{id}$ definierte K-Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(K, R) \otimes_R K \to \mathrm{Hom}_K(K \otimes_R K, R \otimes_R K)$$

(wobei hier K vermöge f als R-Modul angesehen wird) weder injektiv noch surjektiv ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Dienstag, den 16.07.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden.