Modulteilprüfung Geometrie
L2M-GL/L5M-GL

Sommersemester 2019

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. A. Küronya
M. Nickel

30.06.2019

Dauer: 90 Minuten

Hilfsmittel: Stifte und ein einseitig **handbeschriebenes** DinA4-Blatt

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. **Füllen Sie auch beide Deckblätter aus!**
Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.
Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, müssen diese ebenfalls mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen werden. Bitte geben Sie die Anzahl der zusätzlich verwendeten Blätter unten an.
Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

☐ Dies ist eine letzmalig wiederholte Klausur und daher nach Teil III, Abschnitt 2, §15 (9) der Lehramtsstudienordnung von zwei Prüfenden zu bewerten.

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[20 Punkte]

Entscheiden Sie (jeweils mit Beweis oder Gegenbeispiel!), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ ist eine Gerade.

   Gegenbeispiel. Die Punkte $(0, 0), (-1, 1), (1, 1)$ liegen in der Menge, diese sind jedoch nicht kollinear. $\square$

2. Eine Ellipse schneidet eine Parabel stets in zwei oder vier Punkten.

   Gegenbeispiel. Die Ellipse $x^2 + y^2 = 1$ schneidet die Parabel $y = x^2 + 2$ nicht. $\square$

3. Es gibt eine affine Ebene, die genauso viele Geraden wie Punkte besitzt.

   Beweis. Es gibt keine solche unter der Annahme, dass die Ebene endlich ist. Sei q die Ordnung der Ebene. Dann entspricht die Anzahl der Punkte q^2 und die Anzahl der Geraden $q(q + 1)$. Insbesondere ist also die Anzahl verschieden da $q > 0$ ist. $\square$

4. Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene. Wenn wir eine Gerade entfernen, dann bleibt sie immer noch eine affine Ebene.

   Beweis. Bei keiner affinen Ebene ist dies der Fall. Sei g die entfernte Gerade und p, q zwei verschiede Punkte auf dieser (Jede affine Ebene hat mindestens Ordnung 2). Dann sind p und q nach entfernen von g nichtmehr verbunden. Wegen des Verbindungsaxioms ist dies dann keine affine Ebene mehr. $\square$

5. Eine Gerade schneidet eine Parabel in höchstens zwei Punkten.

   Beweis. Durch Drehen und Verschieben kann man annehmen, dass die Gerade die x-Achse ist. Dann sind Schnittpunkte nichts anderes als Nullstellen der Parabel. Nach der pq-Formel gibt es höchstens 2 solche. $\square$

Aufgabe 2

[20 Punkte]

Sei $ax + by + cz = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ eine Gerade in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Für welche Werte von a, b, c hat sie einen Schnittpunkt mit der Geraden $x + y - z = 0$? Berechnen Sie den Schnittpunkt in diesem Fall.

Beweis. Die Geraden sind genau dann gleich, wenn $(a, b, c) = \lambda(1, 1, -1)$ mit beliebigem $\lambda \neq 0$. Ist dies nicht der Fall liefert einsetzen der zweiten Gleichung in die Erste:

$$\begin{aligned}
&x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y \\
&0 = ax + by + cz = ax + by + c(x + y) = (a + c)x + (b + c)y
\end{aligned}$$

Hier ist insbesondere nicht sowohl $a + c$ als auch $b + c$ gleich 0, dies entspricht dem Fall, dass die Geraden sich entsprechen. Der Schnittpunkt ist dann gegeben durch:

$$[b + c : -a - c : -a + b]$$

□

Aufgabe 3

[20 Punkte]

Bestimmen Sie für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$LM(x^3 + \alpha xy + y^3 = 0)$$

ein Kegel in $\mathbb{R}^3$ ist.

Beweis. Sei $K := LM(x^3 + \alpha xy + y^3 = 0)$. Dann ist per Definition K genau dann ein Kegel, wenn $rK \subset K$ für $r \in \mathbb{R}$ ist. Da die Gleichung kubisch ist besitzt sie Lösungen ungleich der 0 in $\mathbb{R}^2$. Die Bedingung eines Kegels übersetzt sich dann in die Homogenität der definierenden Gleichung, jedes Monom muss den gleichen Grad haben. Also ist K ein Kegel genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist. $\square$

Aufgabe 4

[20 Punkte]

Gegeben sei die Ellipse E mit Brennpunkten $F_1 = (2, 1)$ und $F_2 = (7, 1)$, für deren Punkte die Summe der Abstände zu den Brennpunkten 6 beträgt.

1. Bestimmen Sie die Punkte der Ellipse, die auf der Geraden durch F_1 und F_2 liegen
2. Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Leitgeraden der Ellipse.

Beweis.

1. Sei g die Gerade durch F_1 und F_2. Der Abstand der zwei gesuchten Schnittpunkte von g mit der Ellipse beträgt 6. Also liegt jeder der zwei Punkte auf g mit Abstand 3 zur Mitte $(\frac{9}{2}, 1)$ von F_1 und F_2. Die Punkte sind dann $P_1 = (\frac{3}{2}, 1)$ und $P_2 = (\frac{15}{2}, 1)$.
2. Die Leitgeraden l_1, l_2 erfüllen die Gleichung:

$$\frac{|PF_1|}{|Pl_1|} = \frac{|PF_2|}{|Pl_2|} = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \frac{5}{6}$$

   Aus Symmetriegründen stehen l_1 und l_2 senkrecht auf der Geraden durch F_1 und F_2. In unserem Fall also auch senkrecht auf der x-Achse. Ferner folgt, dass die Leitgeraden nicht die Ellipse schneiden. Also reicht es die Punkte aus Aufgabenteil 1 zu betrachten:

$$\frac{5}{6} = \frac{|P_1F_1|}{|P_1l_1|} = \frac{0.5}{|P_1l_1|} \Rightarrow |P_1l_1| = \frac{3}{5}$$
$$\frac{5}{6} = \frac{|P_2F_2|}{|P_2l_2|} = \frac{0.5}{|P_2l_2|} \Rightarrow |P_2l_2| = \frac{3}{5}$$

   Also ist l_1 gegeben durch $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$ und l_2 ist gegeben durch $x = \frac{15}{2} + \frac{3}{5} = \frac{81}{10}$.

□

Aufgabe 5

[20 Punkte]

Gegeben eine affine Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der Ordnung n. Sei außerdem $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade und $p \in \mathcal{P}$ ein Punkt. Geben Sie einen Beweis dafür an, dass es genau n Geraden in $\mathcal{G}$ gibt, die durch p gehen und g in einem Punkt schneiden.

Beweis. Durch das Verbindungsaxiom ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\{\text{Punkte auf } g\} \simeq \{\text{Geraden durch } p, \text{ die } g \text{ in einem Punkt schneiden.}\}$$
$$q \mapsto \{\text{Eindeutige Gerade durch } p \text{ und } q\}$$

Da g schon die eindeutige Verbindungsgerade für verschiedene Punkte auf g darstellt ist die Abbildung injektiv. Also besteht eine Bijektion der Mengen und es folgt:

$$n = |\{\text{Punkte auf } g\}| = |\{\text{Geraden durch } p, \text{ die } g \text{ in einem Punkt schneiden.}\}|$$

□