Modulteilprüfung Geometrie

Sommersemester 2015

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. A. Küronya
Prof. J. Stix
M. Nickel

08.10.2015

Dauer: 60 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 35 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.
Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, müssen diese ebenfalls mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen werden. Bitte geben Sie die Anzahl der zusätzlich verwendeten Blätter unten an.
Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[20 Punkte]

Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort 0 Punkte.

Im folgenden ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, $W \leq V$ ein Unterraum, $\phi : V \times V \to K$ eine Bilinearform.

	wahr	falsch
Sei ϕ positiv semidefinit mit $\phi \neq 0$ und $\dim(V) \neq 0$. Es gibt stets einen Unterraum $U \leq V$ mit $\dim(U) \neq 0$, sodass $\phi\|_{U \times U}$ positiv definit ist.		
(V, ϕ) hat eine Orthogonalbasis genau dann, wenn ϕ positiv semidefinit ist.		
Jede symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$ lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis als Standardskalarprodukt schreiben.		
Es sei K ein beliebiger Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Aus $A^T = -A$ folgt, dass die Diagonalelemente von A alle Null sind.		
Es sei $(V, \phi) = (V_1, \phi_1) \perp (V_2, \phi_2)$ die orthogonale Summe zweier quadratischer Räume. Falls $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, dann gilt $\phi(v_1, v_2) = 0$.		
Eine orthogonale Matrix hat Determinante 1.		
Eine quadratische Form kann dann und genau dann nach einem geeigneten Basiswechsel in Diagonalform geschrieben werden, wenn sie definit ist.		
Es sei (V, ϕ) euklidisch, $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ so, dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$ antisymmetrisch für eine gegebene Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ ist. Dann ist ψ normal.		
Jeder normale Endomorphismus ist selbstadjungiert.		
Jede Matrix, die zu einer Spiegelung gehört, hat Determinante -1.		

Aufgabe 2

[20 Punkte]

Entscheiden Sie jeweils (ohne Begründung), welche der folgenden Antwortmöglichkeiten korrekt sind und kreuzen Sie diese an. Es ist jeweils genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Kreuzen Sie die korrekte Antwortmöglichkeit an, so bekommen sie jeweils 4 Punkte, andernfalls bekommen Sie 0 Punkte.

1. Es sei $f : V \to V$ eine Isometrie eines euklidischen Vektorraums $(V, (\ ,\ ))$ der Dimension 11, dann gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, sodass die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ die folgende Gestalt hat

   ☐
   $$\begin{pmatrix} D_{\phi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{\phi_k} \end{pmatrix}, \text{wobei } D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

   ☐
   $$\begin{pmatrix} E_r & & & \\ & D_{\phi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{\phi_k} \end{pmatrix}, \text{wobei } E_r \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{R}) \text{ die Einheitsmatrix bezeichne}$$

   ☐
   $$\begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\phi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\phi_k} \end{pmatrix} \text{ mit } r = s$$

   ☐ keine der anderen drei Antworten stimmt.

2. Die zur Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   gehörige Bilinearform $\phi_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

   ☐ positiv semidefinit

   ☐ anisotrop

   ☐ schiefsymmetrisch

   ☐ indefinit.

3. Hat die symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ die Eigenwerte $0, 1, 2, 2015$, so ist A
   - ☐ positiv definit
   - ☐ indefinit
   - ☐ positiv semidefinit
   - ☐ entweder positiv oder negativ definit.
4. Sei $P \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann gilt:
   - ☐ gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A^t A = P$, dann ist P positiv semidefinit
   - ☐ ist P positiv semidefinit, so existiert stets $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A^t A = P$
   - ☐ falls P symmetrisch ist, so ist es positiv semidefinit
   - ☐ falls P symmetrisch und semidefinit ist, so ist P orthogonal
5. Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, und $f : V \to V$ eine Abbildung von Mengen. Dann gilt stets
   - ☐ f ist eine Bewegung
   - ☐ Ist f eine Bewegung mit $f(0) = 0$, dann ist f auch normerhaltend
   - ☐ f ist eine Drehung
   - ☐ Ist f normerhaltend, dann ist f eine Isometrie.

Aufgabe 3

[15 Punkte]

Bestimmen Sie die Signatur der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

[15 Punkte]

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, zwei diagonalisierbare Matrizen und α, β die dazugehörigen Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $AB = BA$. Ist $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ eine Eigenraumzerlegung von $\mathbb{R}^n$ bezüglich α, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von α seien, so gilt $\beta(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$.

b) Unter den Voraussetzungen wie in a) gilt: das Minimalpolynom $m_{\beta|_{V_{\lambda_i}}}$ teilt m_β.

c) Es gibt genau dann eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sodass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind, wenn $AB = BA$.