Modulteilprüfung Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2015

Universität Frankfurt
FB 12, Institut für Mathematik
Prof. A. Küronya
Prof. J. Stix
M. Nickel

08.10.2015

Dauer: 60 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 35 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie auf der Rückseite weiter.
Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, müssen diese ebenfalls mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen werden. Bitte geben Sie die Anzahl der zusätzlich verwendeten Blätter unten an.
Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!

Name	Matrikelnr.	1	2	3	4	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

[20 Punkte]

Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort 0 Punkte.

	wahr	falsch
Die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist zyklisch.		
Die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ist zyklisch.		
Es gibt eine Gruppe mit 4 Elementen, die nicht abelsch ist.		
Es gibt genau einen Ring R, in dem 0 invertierbar ist.		
Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist ein Isomorphismus von Gruppen.		
Jedes Element der symmetrischen Gruppe S_n hat eine Ordnung, die n teilt.		
Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ eine Untergruppe. Gilt $gNg^{-1} \subset N$ für alle $g \in G$, so ist N ein Normalteiler.		
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist bis auf Isomorphie die einzige Gruppe mit 6 Elementen.		
Jeder Ring mit 2 Elementen ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.		
Jede Gruppe der Ordnung p^2, wobei p eine Primzahl ist, ist zyklisch.		

Aufgabe 2

[20 Punkte]

Entscheiden Sie jeweils (ohne Begründung), welche der folgenden Antwortmöglichkeiten korrekt sind und kreuzen Sie diese an. Es ist jeweils genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Kreuzen Sie die korrekte Antwortmöglichkeit an, so bekommen sie jeweils 4 Punkte, andernfalls bekommen Sie 0 Punkte.

1. $2 + X \in \mathbb{Z}[[X]]$ ist
   - ☐ invertierbar in $\mathbb{Z}[X]$
   - ☐ invertierbar in $\mathbb{Z}[[X]]$
   - ☐ ein Nullteiler in $\mathbb{Z}[X]$
   - ☐ keine der anderen drei Antworten stimmt.
2. Sei R ein beliebiger euklidischer Ring mit 1. Dann gilt
   - ☐ R kann zu keinem Polynomring isomorph sein
   - ☐ R ist ein Hauptidealring
   - ☐ es gibt ein Ideal $I \subset R$, das nicht von einem Element erzeugt werden kann
   - ☐ keine der anderen drei Antworten stimmt.
3. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und N ein Normalteiler in G. Dann gilt
   - ☐ $f(N)$ ist ein Normalteiler in H, falls f injektiv ist
   - ☐ $f(N)$ ist ein Normalteiler in H
   - ☐ G/N ist isomorph zu einer Untergruppe von H
   - ☐ keine der anderen drei Antworten stimmt.
4. Sei G eine Gruppe und sei N ein Normalteiler in G. Dann gilt für die kanonische Abbildung $\pi : G \to G/N$
   - ☐ π ist stets ein Isomorphismus
   - ☐ π ist nie bijektiv
   - ☐ π ist stets surjektiv
   - ☐ π kann weder surjektiv noch injektiv sein.
5. Die Gruppe S_6 operiere auf einer Menge X. Sei $x \in X$ ein Element von X, sodass der Stabilisator dieses Elements bezüglich der Gruppenwirkung 12 Elemente besitzt. Dann gilt
   - ☐ die Bahn von x hat 60 Elemente
   - ☐ die Bahn von x hat 12 Elemente
   - ☐ die Bahn von x hat nur x als Element
   - ☐ keine der anderen drei Antworten stimmt.

Aufgabe 3

[15 Punkte]

Bestimmen Sie die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ der Gruppenautomorphismen von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ (mit Begrüdung!).

Aufgabe 4

[15 Punkte]

Zeigen Sie, dass das Zentrum von S_n für $n \geq 3$ trivial ist, das heißt $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.