Geometrie

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 27.06.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Für $r = 1, \ldots, n$ sei $A_r \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ die Matrix aus den ersten r Zeilen und Spalten von A.

1. Zeigen Sie: Gilt $\det(A_r) \neq 0$ für alle $r = 1, \ldots, n$ und bezeichnet s die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $(1, \det(A_1), \det(A_2), \ldots, \det(A_n))$, so hat A die Signatur $(n - s, s)$.

   Tipp: Schauen Sie sich den Beweis des Hauptminorenkriteriums genau an und versuchen Sie, den Beweis für diese Aufgabe zu variieren.

2. Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit der Signatur $(2, 1)$ und $\det(A_r) = 0$ für mindestens ein r.

   Ist dies auch für eine Matrix mit der Signatur $(3, 0)$ möglich?

Übung 2 (2+2 Punkte)
Bestimmen Sie die Signatur von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

1. indem Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^t A y$ und die zugehörige Diagonalform bestimmen.

2. indem Sie die Hauptminoren ausrechnen und die Formel aus Übung 1 anwenden.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$. Zeigen Sie:

$$\measuredangle(v, w) = 120^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \|v + w\| = \|v\| = \|w\|.$$

Übung 4 (4 Zusatzpunkte)
Ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

positiv (semi-)definit oder negativ (semi-)definit oder indefinit?

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 05.07.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.