Geometrie

Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 24.06.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$. Sei $A = A^t \in M_n(K)$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, sodass S^tAS Diagonalmatrix ist.

Übung 2 (1+1+1+1 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie den K-Vektorraum $V := M_n(K)$. Man definiert

$$\langle\, , \,\rangle : V \times V \to K,\ \langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(AB^t)\,,$$

wobei die Spur von $C = (c_{ij}) \in M_n(K)$ definiert ist als

$$\mathrm{Spur}(C) := \sum_{i=1}^{n} c_{ii}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\langle A, B\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V ist.
2. Zeigen Sie, dass $U = \{A \in V \mid A^t = A\}$ und $W = \{A \in V \mid A^t = -A\}$ Unterräume von V sind.
3. Zeigen Sie: $V = U \perp W$.
4. Geben Sie für $n = 2$ eine Orthogonalbasis von V an.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei K ein Körper, in dem $2 = 0$ gilt, das heißt ein Körper der Charakteristik 2. Zeigen Sie, dass die Bilinearform auf K^2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

keine Orthogonalbasis besitzt, also bezüglich keiner Basis die Gram'sche Matrix eine Diagonalmatrix ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$ und sei $\langle\, , \,\rangle$ eine perfekte alternierende Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $\dim(V)$ gerade sein muss. *Tipp: benutzen Sie Übung* 3 *auf Übungsblatt* 1.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Montag, den 02.07.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.