Geometrie

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 17.06.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n \subseteq \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Für reelle Zahlen $a < b$ statten wir V_n mit der symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_{[a,b]}$ aus, die auf Polynomen $f, g \in \mathbb{R}[X]$ den Wert

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

annimmt.

1. Zeigen Sie, dass $\langle\ ,\ \rangle_{[a,b]}$ anisotrop ist.
2. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von V_1 in V_2 für $\langle\ ,\ \rangle_{[0,1]}$.

Übung 2 (2+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Ferner sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

1. Die Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U} : U \times U \to K$, $(u_1, u_2) \mapsto \langle u_1, u_2\rangle$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn $U \cap U^\perp = \{0\}$ gilt.
2. Ist $\dim(V) < \infty$, so gilt: $\dim(U^\perp) \geq \dim(V) - \dim(U)$.
3. Ist $\dim(V) < \infty$, so ist die Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U}$ wie in (a) genau dann nichtausgeartet, wenn $V = U \oplus U^\perp$ gilt.

Übung 3 (2+2 Punkte)

1. Sei V ein K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie, dass $v \in V$ genau dann anisotrop ist, wenn $V = \langle v\rangle \oplus v^\perp$ eine direkte Summe ist.
2. Sei V ein K-Vektorraum mit perfekter und symmetrischer Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie, dass jede Orthogonalbasis aus anisotropen Vektoren besteht.

Übung 4 (1+3 Punkte)

1. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und sei $f : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ eine Bilinearform, die gegeben ist durch

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Basis von $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum, die aus den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besteht. Geben Sie $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ an.

2. Auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) seien Bilinearformen
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_i : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle_i := x^t A_i y,$$
definiert für $i = 1, 2, 3$, wobei
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie für jedes i den Orthogonalraum von $U := \langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{Q}}$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Montag, den 25.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.