Geometrie

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 07.06.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)

1. Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Ferner sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^*$ die dazu duale Basis. Zeigen Sie:
$$S_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\langle , \rangle)^{-1}.$$
Hierbei bezeichnet $S_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$ wie in der Vorlesung Lineare Algebra die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{B}$.

2. Zeigen Sie, dass
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto x^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y$$
eine perfekte symmetrische Bilinearform definiert und bestimmen Sie die zur Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ duale Basis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Übung 2 (1+1+2 Punkte)

1. Entscheiden Sie, ob die folgende Abbildung eine Paarung von Vektorräumen über $\mathbb{Q}$ ist:
$$\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1x_2 - 2y_1y_3 + 3y_2y_3.$$

2. Entscheiden Sie, ob es sich bei der folgenden Abbildung um eine symmetrische bzw. alternierende Bilinearform über $\mathbb{Q}$ handelt:
$$\mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

3. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ferner sei $f : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ eine Bilinearform, die gegeben ist durch
$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass f perfekt und symmetrisch ist, und bestimmen SIe die duale Basis $\mathcal{E}^*$ bezüglich f.

Übung 3 (2+2 Punkte)
Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$. Ferner sei V ein K-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ eine alternierende Bilinearform auf V.

1. Zeigen Sie:
   (a) Ist $v \in V \setminus V^{\perp}$, so gibt es ein $v' \in V$ mit $\langle v, v' \rangle = 1$.
   (b) Mit v, v' aus Teil (a) und U definiert als der von v und v' erzeugte Untervektorraum gilt: $V = U \oplus U^{\perp}$.

2. Sei nun $K = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^4$ und

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ bezeichnet. Nutzen Sie Teil (a), um eine Basis $\mathcal{B}$ von V zu bestimmen, für die gilt:

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Übung 4 (4 Punkte)
Finden Sie eine perfekte Paarung $\langle,\rangle : V \times V \to K$ und einen Unterraum $W \subseteq V$, so dass die Einschränkung von $\langle,\rangle$ auf $W \times W \to K$ kene perfekte Paarung ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 14.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.