Grundlagen der Algebra

Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 17.05.2018
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie: jede endliche Gruppe der Ordnung p^n mit p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt $|Z(G)| > 1$.

Übung 2 (2+2 Punkte)

1. Sei R ein Ring. Welches sind die invertierbaren Elemente in $\mathrm{Abb}(X, R)$ und wie sieht die Gruppenstruktur auf $\mathrm{Abb}(X, R)^\times$ aus?

2. Bestimmen Sie die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: zeigen Sie, dass

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{d + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \ d \text{ und } n \text{ sind teilerfremd}\}.$$

   Was ist die Mächtigkeit von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$?

Übung 3 (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Wir betrachten im Potenzreihenring

$$K[[X]] := \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in K \text{ für alle } i \geq 0\}$$

die Teilmenge

$$R := \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in K \text{ für alle } i \geq 0 \text{ und } a_1 = 0\} \subseteq K[[X]]$$

der Potenzreihen ohne linearen Term. Zeigen Sie, dass R ein Unterring ist.

Übung 4 (4 Punkte)

1. Sei V_4 die Symmetriegruppe des nicht gleichseitigen Rechtecks (die Kleinsche Vierergruppe). Zeigen Sie, dass man V_4 als Untergruppe von S_4 auffassen kann und geben Sie die Elemente von V_4 in Zykelschreibweise an.

2. Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler von S_4 ist.

3. Zeigen Sie, dass S_3 isomorph zu S_4/V_4 ist.

Übung 5 Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)
Sei K ein Körper. Wir definieren $K[\varepsilon]$ als 2-dimensionalen K-Vektorraum mit Basis $1, \varepsilon$ und schreiben die Vektoren mit Koordinaten $a, b \in K$ bezüglich dieser Basis als $a + b\varepsilon$. Dann definieren wir eine Addition

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

und eine Multiplikation

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (bc + ad)\varepsilon.$$

Sei R ein Ring und $\varphi : R \to K[\varepsilon]$ ein Ringhomomorphismus. Wir schreiben φ in Koordinaten für $f \in R$ als $\varphi(f) = f(0) + \partial f \varepsilon$ mit $f(0) \in K$ und $\partial f \in K$. Zeigen Sie, dass

$$f \mapsto f(0)$$

ein Ringhomomorphismus $R \to K$ ist und für $f, g \in R$ gilt

$$\partial(fg) = f(0)\partial g + g(0)\partial f.$$

Anmerkung: Die Notation f für ein Element ist suggestiv für einen Ring von Funktionen R. Die Notation $f(0)$ suggeriert eine Auswertung, ist aber rein formal nur eine Notation für die erste Komponente. Die Notation ∂f suggeriert eine Ableitung, ist aber rein formal nur eine Notation für die zweite Komponente. Das $\varepsilon \in K[\varepsilon]$ ist die algebraische Variante einer infinitesimal kleinen Zahl.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 24.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.