Grundlagen der Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 10.05.2018

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Der Normalisator $N_G(U)$ von U in G ist der Stabilisator von U bezüglich der Operation von G auf der Menge seiner Untergruppen durch Konjugation. Zeigen Sie, dass $U \subseteq N_G(U)$ und dass $N_G(U)$ die größte Untergruppe von G ist, in der U ein Normalteiler ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe, p der kleinste Primteiler von $|G|$ und $U \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index $p = (G : U)$. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler ist.
Tipp: Lassen Sie G auf G/U durch Translation operieren. Man bekommt so einen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to S_p$, indem $g \in G$ auf die Permuation der Nebenklassen abgebildet wird, die es induziert. Bestimmen Sie nun den Kern von ρ.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und sei $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ der Gruppenhomomorphismus mit

$$\varphi(g) = \varphi_g = (h \mapsto ghg^{-1})\,.$$

Zeigen Sie, dass das Bild von φ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Die Gruppe A_n ist definiert als Kern der Abbildung $\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$.
(a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit von A_n.
(b) Zeigen Sie, dass A_4 außer sich selbst und $\{\mathrm{id}\}$ genau einen Normalteiler besitzt.

Übung 5 Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen, die als Ordnung von Elementen von S_9 auftreten können.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 17.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.