

Grundlagen der Algebra
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

26.04.2018

Übung 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Orbits der Operation von $GL_n(K)$ auf K^n durch Matrixmultiplikation

Übung 2 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und $f : M \rightarrow M$ eine Involution, das bedeutet es gilt $f \circ f = \text{id}_M$.

1. Konstruieren Sie eine Gruppenoperation von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf M , bei der für alle $x \in M$ gilt: $[1].x = f(x)$.
2. Sei nun M eine endliche Menge und f habe genau einen Fixpunkt. Zeigen Sie, dass M ungerade viele Elemente hat.
3. Gilt auch die Umkehrung von 2? Was kann man über die Fixpunkte von f sagen, wenn $\#M$ ungerade ist?

Übung 3 (4 Punkte)

$\mathbb{P}^n(K)$ ist definiert als die Menge aller Geraden $L = Kv \subseteq K^{n+1}$ für $0 \neq v \in K^{n+1}$. Für eine Matrix $A \in GL_{n+1}(K)$ ist

$$AL = \{Aw \mid w \in L\}$$

ebenfalls eine Gerade in K^{n+1} . Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} GL_{n+1}(K) \times \mathbb{P}^n(K) &\rightarrow \mathbb{P}^n(K) \\ (A, L) &\mapsto AL \end{aligned}$$

eine Operation von $GL_{n+1}(K)$ auf $\mathbb{P}^n(K)$ definiert.

Übung 4 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Operation von $G = GL_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ aus der vorigen Aufgabe analysiert werden.

1. Beschreiben Sie den Stabilisator G_x eines geschickt gewählten Punktes $x \in \mathbb{P}^1(K)$.
2. Bestimmen Sie für zwei verschiedene (geschickt gewählte) Punkte $x, y \in \mathbb{P}^1(K)$ den Stabilisator des Paares (x, y) :

$$G_{x,y} = \{g \in G \mid g.x = x \text{ und } g.y = y\}.$$

Zeigen Sie, dass $G_{x,y} = G_x \cap G_y$ gilt.

3. Bestimmen Sie den Stabilisator des ungeordneten Paares $\{x, y\}$, also

$$G_{\{x,y\}} = \{g \in G \mid \{g.x, g.y\} = \{x, y\}\},$$

für die in 2 gewählten Punkte x, y .

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 03.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.