

Grundlagen der Algebra
Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

19.04.2018

Übung 1 (2+2 Punkte)

1. Sei G eine abelsche Gruppe und $g, h \in G$. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{ord}(gh) \leq \text{kgV}(\text{ord}(g), \text{ord}(h))$$

gilt. Geben Sie ein Beispiel an, für das $\text{ord}(gh) < \text{kgV}(\text{ord}(g), \text{ord}(h))$ ist.

2. Geben Sie eine Gruppe G und Elemente $g, h \in G$ an, für die gilt:

$$\text{ord}(g) < \infty, \text{ord}(h) < \infty \text{ aber } \text{ord}(gh) = \infty.$$

Hinweis: dazu kann man zum Beispiel die Gruppe aller bijektiven Abbildungen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ betrachten.

Übung 2 (0+1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen sind Untergruppen (mit Beweis)?

1. $\mathbb{Q}^\times \subseteq \mathbb{Q}$,
2. $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + 3b = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
3. $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) \neq 2\} \subseteq S_4$,
4. $\{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = 1\} \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
5. $U = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{R})$

Übung 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Gruppen mit 3 Elementen (mit Beweis).

Übung 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Quadrat im \mathbb{R}^2 mit den Ecken $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des Quadrats als Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:15 Uhr** am **Donnerstag, den 26.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.