Elementarmathematik

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 17.05.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4+2 Punkte)

1. Zeigen Sie: ein unendlicher Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ ist genau dann ein Element von $\mathbb{Q}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass die Folge der Nachkommastellen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \geq N$ periodisch ist.

2. Betrachten Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \cdots + 10^{-n}$$
$$b_n := 1 + 10^{-1} + 10^{-4} + 10^{-9} + \cdots + 10^{-n^2}.$$

Konvergieren die Folgen? Falls ja, ist der jeweilige Grenzwert ein Elemente aus $\mathbb{Q}$?

Übung 2 (2+4 Punkte)
Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, falls es ein Polynom $g(X) = g_n X^n + g_{n-1} X^{n-1} + \cdots + g_1 X + g_0$ gibt mit $g_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ und $g(\alpha) = 0$.

1. Geben Sie ein Beispiel für eine irrationale Zahl an, die algebraisch ist (mit Begründung).

2. Zeigen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist und folgern Sie: Es existieren reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind. Diese Zahlen nennt man *transzendent*.

Übung 3 (2+2 Punkte)
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (jeweils mit Begründung)?

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{17} + 2x^{15} - 10x + 2$ hat eine Nullstelle.

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion , wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann hat jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in f([a, b]) := \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in [a, b]\}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 29.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.