Elementarmathematik

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 10.05.2017
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)
Zeigen Sie: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Übung 2 (4+2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert α genau dann, wenn $\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\inf_{l\in\mathbb{N}}\{a_l \mid l \geq k\}\} = \inf_{k\in\mathbb{N}}\{\sup_{l\in\mathbb{N}}\{a_l \mid l \geq k\}\} = \alpha$.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit der Eigenschaft $\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\inf_{l\in\mathbb{N}}\{a_l \mid l \geq k\}\} = 0$ und $\inf_{k\in\mathbb{N}}\{\sup_{l\in\mathbb{N}}\{a_l \mid l \geq k\}\} = 1$.

Übung 3 (2+2+2 Punkte)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (jeweils mit Begründung).

1. Haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keinen* Grenzwert, so hat auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n + b_n$ keinen Grenzwert.
2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist auch die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \max(a_n, a_{n+1})$ konvergent.
3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann hat die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $s_n := f(r_n)$ eine beschränkte Teilfolge.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 18.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.